

تألیف جدید



ریاضی تیزهوشان ۹

| درسنامه‌های کامل | تست‌های فراوان | پاسخ‌های روان |

مؤلفان: علی‌اصغر خنجری • محسنی عارف‌نسیب

ویژه آزمون ورودی مدارس تیزهوشان و نمونه دولتی

موفقیت،
به همین راحتی به
دست تمیاد...
شاید بهترین راهش
داشتن به آی کیو
خوب توی قرن جدید
باشه...

**نسل جدید کتاب های تیزهوشان
تا آخرش همراهت هست**



نسل جدید



نسل قدیم

دکتر آی کیو
DRIQ.com
کلاس آنلاین



گاج مارکت
gajmarket.com
فروشگاه آنلاین



گاجینو
gajino.com
آموزش آنلاین



ریاضی تیزهوشان نهم



9 786220 306782

از اینکه به ما اعتماد کردید و کتاب ریاضی IQ را برای مطالعه بیشتر در مدارس تیزهوشان یا آمادگی جهت شرکت در آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان و نمونه دولتی انتخاب کرده‌اید از شما سپاسگزاریم. عزیزان این کتاب نتیجه ۲۲ سال تدریس در مدارس تیزهوشان و یا مدارس و آموزشگاه‌های معتبر کشور می‌باشد. از آنجا که دانش‌آموزان مدارس تیزهوشان جهت مطالعه عمیق‌تر و همچنین آماده شدن برای آزمون‌های پایش نیاز به یک منبع علمی مناسب دارند و از طرفی دانش‌آموزان مدارس دیگر که قصد شرکت در آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان، نمونه دولتی و یا مدارس خاص دیگری را دارند نیاز به کتابی جامع از نظر درسنامه و همچنین پوشش کامل سؤالات دارند، تصمیم گرفتیم تا این کتاب را به رشته تحریر در آوریم و در اختیار شما عزیزان قرار دهیم. در هر فصل این کتاب با توجه به درس‌های مربوطه، درسنامه جامع و کاملی آماده شده است که شامل نکات و مثال‌های کاربردی می‌باشد و با مطالعه آنها مطالب را به خوبی خواهید آموخت. در ضمن این درسنامه‌ها در کلاس‌های تیزهوشان باعث صرفه‌جویی در زمان کلاس خواهند شد، زیرا دیگر نیاز به یادداشت‌برداری نکات و سؤالات نمی‌باشد و به جای آن می‌توانید از این زمان برای تحلیل بیشتر مطالب و درک عمیق‌تر آنها استفاده کنید. در بخش تستی هر درس، پرسش‌های آزمون‌های ورودی سال‌های قبل به همراه پرسش‌های آزمون‌های پایش مدارس تیزهوشان (این آزمون سالانه دو مرتبه جهت سنجش وضعیت درسی دانش‌آموزان مدارس تیزهوشان در کل کشور به طور همزمان برگزار می‌شود) آورده شده، پس شما دانش‌آموز خوب مدرسه تیزهوشان جهت آماده شدن برای آزمون‌های پایش می‌توانید این سؤالات را حل کرده و تحلیل نمایید. در ضمن دانش‌آموزان دیگر هم می‌توانند با حل آنها با سؤالات احتمالی در آزمون تیزهوشان و یا نمونه دولتی هم آشنا شوند. در پایان هم چند مرحله آزمون ورودی مدارس خاص ارائه شده است. پیشنهاد می‌کنیم ابتداء به سؤالات آنها پاسخ دهید و سپس به مطالعه پاسخنامه بپردازید.

فصل ۱: مجموعه‌ها ۵

فصل ۲: عددهای حقیقی ۳۷

فصل ۳: استدلال و اثبات در هندسه ۵۹

فصل ۴: توان و ریشه ۹۷

فصل ۵: عبارت‌های جبری ۱۲۹

فصل ۶: خط و معادله‌های خطی ۱۵۹

فصل ۷: عبارت‌های گویا ۱۸۹

فصل ۸: حجم و مساحت ۲۰۷

آزمون‌ها ۲۳۳

پاسخنامه ۲۴۷



فصل ۱ مجموعه‌ها

معرفی مجموعه صفحه ۶

معرفی مجموعه

عدد اصلی مجموعه

نمودار ون

سؤالات پرتکرار و رایج درس اول



جلسه صفر: مقدمه

مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها صفحه ۱۰

مجموعه‌های برابر

زیرمجموعه

نمایش مجموعه‌ها از زبان ریاضی به مجموعه‌های عددی

نمایش مجموعه‌های اعداد به زبان ریاضی

سؤالات پرتکرار و رایج درس دوم



جلسه اول: معرفی مجموعه -
مجموعه‌های برابر و نمایش
مجموعه‌ها

اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها صفحه ۲۰

اجتماع و اشتراک دو مجموعه

تفاضل دو مجموعه

سؤالات پرتکرار و رایج درس سوم



جلسه دوم: زیرمجموعه، نمایش
مجموعه‌های اعداد - اجتماع،
اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

مجموعه‌ها و احتمال صفحه ۳۰

محاسبه احتمال

پیشامد متمم

احتمال غیرهم‌شانس

سؤالات پرتکرار و رایج درس چهارم



جلسه سوم: ادامه اجتماع،
اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها -
مجموعه‌ها و احتمال

پاسخنامه صفحه ۲۴۷



درس اول: معرفی مجموعه

معرفی مجموعه

مجموعه: در ریاضی برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای کاملاً مشخص (یعنی اعضا سلیقه‌ای انتخاب نشوند و کاملاً معین باشند) و دو به دو متمایز (غیرتکراری) از مجموعه استفاده می‌شود.

(آزمون ورودی)

❶ کدام عبارت، یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

❶ چهار عدد فرد متوالی ❷ پنج عدد بزرگ‌تر از ۱۰۰

❸ سه شهر ایران ❸ یک عدد اول زوج

❹ گزینه «۴» گفتیم که **عضوهای مجموعه باید کاملاً معین باشند و نباید به صورت سلیقه‌ای نوشته شوند.** در گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳» هر شخصی می‌تواند با توجه به سلیقه خود پاسخ بدهد؛ ولی در گزینه «۴» با توجه به اینکه عدد ۲ تنها عدد اول زوج است، پس این عبارت مجموعه {۲} را تشکیل می‌دهد.

(آزمون ورودی)

❺ مجموعه اعداد صحیح بین $13 - \sqrt{13}$ و $17 + \sqrt{17}$ کدام است؟

❶ {۱, ۸, ۱۰, ۱۱, ...} ❷ {۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ...}

❸ {۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ...} ❹ {۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ...}

❺ گزینه «۲» عددی بین ۹ و ۱۰ است. $10 < 13 - \sqrt{13} < 9 < 13 - \sqrt{13} < 13 - 3 \Rightarrow 9 < 13 - \sqrt{13} < 10 \Rightarrow$

عددی بین ۱۲ و ۱۳ است. $12 < -17 + \sqrt{17} < -17 + 5 \Rightarrow -13 < -17 + \sqrt{17} < -12 \Rightarrow$

بنابراین کافی است مجموعه اعداد صحیح بین ۱۰ و ۱۳ را بنویسیم: {۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ...}

نکته

گاهی یک مجموعه مانند {۱, ۲}، می‌تواند عضو مجموعه دیگری مانند $A = \{1, 2, 3\}$ باشد؛ دقت کنید در مجموعه A داریم: $1 \in A$ و $2 \in A$ ولی $3 \notin A$ و $\{1, 2\} \in A$.

❶ با توجه به مجموعه روبه‌رو کدام عبارت **نادرست** است؟

$$A = \{2, \{1\}, 0, 13\}$$

❶ $1 \in A$ ❷ $12 \in A$ ❸ $0 \in A$ ❹ $2 \in A$

❺ گزینه «۱» مجموعه A شامل ۴ عضو است که عبارت‌اند از ۰، {۱}، ۲ و ۱۳ بنابراین $1 \notin A$.

نکته

در هر مجموعه اعضا باید دو به دو متمایز باشند، لذا در هر مجموعه عضو تکراری بی‌تأثیر است.

در هر مجموعه، ترتیب نوشتن عضوهای مجموعه مهم نیست و یا جابه‌جا کردن عضوهای یک مجموعه، مجموعه جدید به وجود نمی‌آید.

(آزمون ورودی)

❶ مجموعه $A = \{x, \{x\}, \{x, x\}, \{x, x, x\}, \dots\}$ چند عضو دارد؟

❶ ۱ ❷ ۲ ❸ بی‌شمار ❹ نمی‌توان مشخص کرد.

❺ گزینه «۲» می‌دانیم که عضوهای هر مجموعه باید متمایز باشند، پس می‌توانیم عضوهای تکراری را حذف کنیم. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$A = \{x, \{x\}, \{x, x\}, \{x, x, x\}, \dots\} = \{x, \{x\}, \{x, x\}, \dots\} = \{x, \{x\}\}$$

داشت:

پس مجموعه A دارای ۲ عضو است.

مجموعه تهی: مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد، مجموعه تهی نام دارد که آن را با نماد { } یا $\emptyset$ نمایش می‌دهیم. توجه داشته باشید

که مجموعه‌های {۰}، $\{\emptyset\}$ یا $\{\{\}\}$ تهی نیستند.

(توجه: ۱)

۱ کدام یک از مجموعه‌های زیر تهی است؟

- ۱) اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۸ که مکعب کامل باشند. ۲) اعداد صحیح غیرمثبتی که مربعشان با خودش برابر باشد.
- ۳) اعداد طبیعی که مربعشان کوچک‌تر از خودش باشد. ۴) اعداد اول بین ۱۹ و ۲۹
- گزینه ۳: بررسی گزینه‌ها:

- ۱) عدد ۱ مکعب کامل و کوچک‌تر از ۸ است، بنابراین این مجموعه به صورت $\{1\} = \{1^3\}$ است.
- ۲) عددهای صحیح غیرمثبت عبارت‌اند از: $0, -1, -2, -3, \dots$ پس این مجموعه به صورت $\{0\} = \{0^2\}$ است.
- ۳) مربع هر عدد طبیعی، بزرگ‌تر یا مساوی خودش است، پس این مجموعه به صورت تهی است.
- ۴) عدد ۲۳ تنها عدد اول بین ۱۹ و ۲۹ است، پس این مجموعه به صورت $\{23\}$ است.

عدد اصلی مجموعه

اگر مجموعه A دارای K عضو باشد، تعداد اعضای مجموعه A را با نماد ریاضی به صورت $n(A) = K$ نمایش می‌دهیم و می‌گوییم عدد اصلی مجموعه A ، برابر K است.

نکته

- برای تعیین تعداد عددهای صحیح از a تا b ($b > a$) از رابطه $b - a + 1$ استفاده می‌کنیم.
- برای تعیین تعداد عددهای صحیح بین a تا b ($b > a$) از رابطه $b - a - 1$ استفاده می‌کنیم.
- برای تعیین تعداد عددهای متوالی که با فاصله مساوی از یکدیگر قرار دارند، از رابطه $(\text{کوچک‌ترین عدد} - \text{بزرگ‌ترین عدد}) / \text{فاصله دو عدد متوالی} + 1$ استفاده می‌کنیم.

(توجه: ۲)

۲ مجموعه $A = \{2^{11} + 2, 2^{11} + 4, 2^{11} + 6, \dots, 2^{12}\}$ چند عضو دارد؟

- ۱) 2^{12} ۲) 2^9 ۳) 2^{10} ۴) 2^{11}
- گزینه ۳:

روش اول: می‌دانیم که $2^{11} + 2^{11} = 2 \times 2^{11} = 2^{12}$ می‌باشد، بنابراین مجموعه A را به صورت $\{2^{11} + 2, 2^{11} + 4, 2^{11} + 6, \dots, 2^{11} + 2^{11}\}$ می‌نویسیم. از طرفی اگر از تمامی عضوهای عبارت 2^{11} را حذف کنیم، مجموعه $B = \{2, 4, 6, 8, \dots, 2^{11}\}$ به دست می‌آید که نشان‌دهنده عددهای زوج ۲ تا 2^{11} است و تعداد عضوهایش با مجموعه A برابر می‌باشد، پس:

روش دوم: با استفاده از رابطه «تعداد عددهای متوالی با فاصله مساوی» داریم:

$$n(A) = \frac{2^{12} - (2^{11} + 2)}{2} + 1 = \frac{(2^{11} + 2^{11}) - (2^{11} + 2)}{2} + 1 = \frac{2^{11} + \cancel{2^{11}} - \cancel{2^{11}} - 2}{2} + 1 = \frac{2^{11} - 2}{2} + \frac{2}{2} = \frac{2^{11}}{2} = 2^{10}$$

(توجه: ۳)

۳ تعداد عضوهای کدام یک از مجموعه‌های زیر، نادرست نوشته شده است؟

- ۱) $A = \{3, 6, 9, 12, \dots, 105\} \Rightarrow n(A) = 35$ ۲) $B = \{-25, -23, -21, \dots, +17\} \Rightarrow n(B) = 29$
- ۳) $C = \{-1000, +995, -990, \dots, -110\} \Rightarrow n(C) = 179$ ۴) $D = \{-9/25, -9, -8/25, \dots, +9\} \Rightarrow n(D) = 74$

گزینه ۳: بررسی گزینه‌ها:

۱) عضوهای مجموعه A ، مضرب‌های طبیعی عدد ۳ هستند، بنابراین کافی است که آخرین عضو را بر ۳ تقسیم کنیم: $n(A) = \frac{105}{3} = 35$

تذکر: با استفاده از رابطه «تعداد عددهای متوالی با فاصله مساوی» نیز می‌توان تعداد اعضای این مجموعه را پیدا کرد.

۲) فاصله بین عددهای متوالی برابر ۲ واحد است، بنابراین طبق نکات بالا داریم:

$$n(B) = \frac{+17 - (-25)}{2} + 1 = \frac{52}{2} + 1 = 27$$

۳) عددها یکی در میان مثبت و منفی هستند، بنابراین ابتدا علامت‌ها را کنار می‌گذاریم. حالا می‌بینیم که فاصله بین عددها ۵ تا ۵ تا است.

$$n(C) = \frac{1000 - 110}{5} + 1 = \frac{890}{5} + 1 = 178 + 1 = 179$$

پس:

$$n(D) = \frac{(+9) - (-9/25)}{0/25} + 1 = \frac{18/25}{0/25} + 1 = \frac{1825}{25} + 1 = 73 + 1 = 74$$

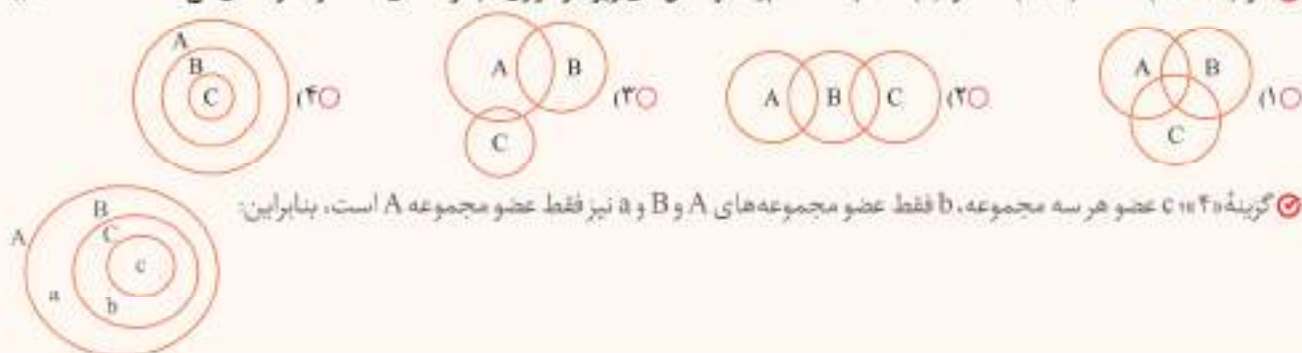
۴) فاصله بین عددهای متوالی ۰/۲۵ می‌باشد، بنابراین:

بنابراین تنها در گزینه ۲۰ تعداد اعضای مجموعه به درستی نوشته نشده است.

نمودار ون

برای نمایش یک مجموعه می‌توانیم اعضای آن را داخل یک منحنی بسته و یا خط شکسته بسته بنویسیم که به این نوع از نمایش مجموعه‌ها، نمودار ون گفته می‌شود.

۵) اگر $A = \{a, b, c\}$ ، $B = \{b, c\}$ و $C = \{c\}$ باشد، کدام یک از شکل‌های زیر نمودار ون مجموعه‌های A ، B و C را نشان می‌دهد؟ (تک‌گزینه‌ای)



۴) کدام یک از عبارت‌های زیر، مجموعه تهی را مشخص می‌کند؟ (تک‌گزینه‌ای)

- ۱) اعداد گویای بین ۵ و ۶
- ۲) اعداد طبیعی بین ۱ و -۱
- ۳) اعداد طبیعی مضرب ۳ که اول باشند.
- ۴) اعداد حقیقی بین $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$

۵) کدام گزینه مجموعه تهی را معرفی نمی‌کند؟ (پایه ۹)

- ۱) کوچک‌ترین عدد گویای بزرگ‌تر از ۲.
- ۲) همه اعداد طبیعی دو رقمی که بیش از ۱۰۰ مقسوم‌علیه دارند.
- ۳) همه اعداد گویایی که مجموع صورت و مخرج آنها برابر $\sqrt{2}$ باشد.
- ۴) اعداد صحیحی که نه زوج هستند و نه فرد.

۶) مجموعه A دارای چند عضو است؟

- ۱) ۲ عضو
- ۲) هیچ عضوی ندارد.
- ۳) ۱ عضو
- ۴) هیچ کدام

۷) مجموعه $A = \{0, \emptyset, \{\}, \{\emptyset, 0\}, \{\{\}\}, \{\emptyset\}\}$ چند عضو دارد؟

- ۱) ۳
- ۲) ۴
- ۳) ۵
- ۴) ۶

سوالات پرتکرار و رایج درس اول

۱) کدام یک از گزینه‌های زیر، یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

- ۱) اعداد اول بین ۲۴ و ۲۸ (از بین ۹۹)
- ۲) سه عدد بخش‌پذیر بر ۱۱
- ۳) دو عدد که حاصل ضرب آن‌ها ۵ شود.
- ۴) چهار عدد طبیعی متمایز که مجموع آنها برابر ۱۲ شود.

۲) کدام یک از گزینه‌های زیر تشکیل مجموعه نمی‌دهد؟ (استدلال ۹۹)

- ۱) دو عدد بین ۱ و ۴
- ۲) اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱
- ۳) اعداد طبیعی بین ۳ و ۴
- ۴) دو عدد صحیح بین ۳ و ۶

۳) چه تعداد از عبارت‌های زیر تشکیل مجموعه می‌دهد؟ (استدلال ۹۹)

- آ) شمارنده‌های مرکب عدد ۱۱
- ب) اعداد گویای کمتر از -۱
- پ) پنج عدد گنگ بین $\sqrt{17}$ و $\sqrt{23}$
- ۱) صفر
- ۲) یک
- ۳) دو
- ۴) سه

۱۵ مجموعه $A = \{250, 925, \sqrt{3100}, 2725\}$ چند عضو دارد؟

(پوشه، ۱۳۰۰)

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐
۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۱۶ همه اعداد طبیعی دورقمی را در نظر می‌گیریم و مجموع ارقام هر

عدد را از خود عدد کم می‌کنیم، سپس باقیمانده‌های به‌دست‌آمده را در مجموعه‌ای به نام A می‌نویسیم، در این صورت $n(A)$ برابر کدام گزینه می‌شود؟

(پوارمقال و یکتای، ۱۳۹۰)

- ۹۰ (۱) ☐ ۹ (۲) ☐
۱۰ (۳) ☐ ۸۹ (۴) ☐

۱۷ اگر $M = \{n, n+1, n-2, n+3\}$ و $5 \in M$ و $7 \notin M$ آنگاه n

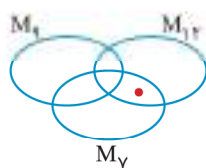
(تهران، ۱۳۹۰)

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐
۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۱۸ در نمودار زیر، مجموعه‌های M_1 ، M_2 و M_3 به ترتیب مضرب‌های

۷، مضرب‌های ۹ و مضرب‌های ۱۲ را مشخص می‌کنند. نقطه‌ای که در شکل نشان داده شده است، نمایانگر کدام یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟

(پیشرفت تحصیلی نوجوانان)



- ۴۹ (۱) ☐ ۶۰ (۲) ☐
۲۵۲ (۳) ☐ ۱۶۸ (۴) ☐

۱۸ کدام گزینه زیر، نشان‌دهنده مجموعه‌ای یک عضوی است؟

- ۱ (۱) ☐ عددهای طبیعی بین ۳- و ۴-
۲ (۲) ☐ عددهای طبیعی که نه اول و نه مرکب هستند
۳ (۳) ☐ عددهای اول یک‌رقمی
۴ (۴) ☐ مضرب‌های صحیح ۷

۱۹ مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ چند عضو دارد؟

(آزمون ورودی)

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐
۳ (۳) ☐ بی‌شمار (۴) ☐

۲۰ مجموعه $A = \{1, 2, 3, 3, 5, 5, 5, 5, \dots, 11\}$ که در آن هر عدد

(آزمون ورودی)

- به تعداد خودش نوشته شده است، دارای چند عضو است؟
۱۱ (۱) ☐ ۳۶ (۲) ☐
۶ (۳) ☐ نمی‌توان مشخص کرد. (۴) ☐

۲۱ اگر داشته باشیم: $A_1 = \{1\}$ ، $A_2 = \{2, 3\}$ ، $A_3 = \{4, 5, 6\}$ و

$A_4 = \{7, 8, 9, 10\}$ در این صورت مجموعه A_4 با چه عددی شروع

(آزمون ورودی)

می‌شود؟

- ۴۵ (۱) ☐ ۴۶ (۲) ☐
۵۵ (۳) ☐ ۵۶ (۴) ☐

۲۲ سی‌ویکمین عضو از مجموعه $\{2, -7, 12, -17, \dots, 202\}$

(آزمون ورودی)

کدام است؟

- ۱۴۷ (۱) ☐ ۱۴۷- (۲) ☐
۱۵۲ (۳) ☐ ۱۵۲- (۴) ☐

۲۳ مجموعه $A = \{2^{200} + 2, 2^{200} + 4, 2^{200} + 6, \dots, 2^{200} + 1\}$ چند

(آزمون انرژی الهی)

عضو دارد؟

- ۲^{۲۰۰} (۱) ☐ ۲^{۲۰۰} (۲) ☐
۲۰۰ (۳) ☐ ۲۹۹ (۴) ☐

۲۴ مجموعه $A = \{2^{100} + 2, 2^{100} + 4, 2^{100} + 8, \dots, 2^{100} + 1\}$ چند

(آزمون ورودی)

عضو دارد؟

- ۲۰۰ (۱) ☐ ۲۰۰ (۲) ☐
۱۰۰ (۳) ☐ ۱۰۰ (۴) ☐

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

مجموعه‌های برابر

آموختیم که هرگاه، هر عضو از مجموعه A عضوی از مجموعه B باشد و برعکس، هر عضو از مجموعه B نیز عضوی از مجموعه A باشد، در این صورت هر دو مجموعه A و B با هم برابر هستند و می‌نویسیم $A = B$.

در مجموعه‌های برابر باید تعداد و خود اعضا دقیقاً مثل هم باشند، بنابراین در سؤال‌های مربوط به مجموعه‌های برابر ابتدا به عضوهای هر دو مجموعه دقت می‌کنیم و اگر عضو تکراری در هر کدام از مجموعه‌ها وجود داشت، عضوهای اضافی را حذف می‌کنیم. سپس با تعیین عضوهای مشترک در هر دو مجموعه و برقراری تساوی بین آنها، معادله تشکیل می‌دهیم و مقادیر خواسته شده را به دست می‌آوریم.

③ دو مجموعه $A = \{ \{x-1\}, \{3\} \}$ و $B = \{ \{5\}, \{x-y\} \}$ مساوی‌اند، x و y در کدام گزینه به درستی نوشته شده است؟ (گزینه‌ها)

$$\textcircled{1} x = 6 \text{ و } y = 3 \quad \textcircled{2} x = 3 \text{ و } y = 6$$

$$\textcircled{3} x = 3 \text{ و } y = 3 \quad \textcircled{4} x = 6 \text{ و } y = 6$$

④ گزینه ۱: هر کدام از مجموعه‌های A و B دارای دو عضو هستند. توجه داشته باشید که عضو $\{3\}$ از مجموعه A نمی‌تواند با عضو $\{5\}$ از مجموعه B برابر باشد، لذا خواهیم داشت:

$$\{x-1\} = \{5\} \Rightarrow x-1=5 \Rightarrow x=5+1=6$$

$$\{x-y\} = \{3\} \Rightarrow x-y=3 \xrightarrow{x=6} 6-y=3 \Rightarrow y=3$$

⑤ در تساوی $\{a\} = \{ (2x-5), (25-3x) \}$ ، مقدار « a » کدام است؟

$$\textcircled{1} \frac{25}{3} \quad \textcircled{2} 7 \quad \textcircled{3} \frac{5}{3} \quad \textcircled{4} 4$$

⑥ گزینه ۲: ظاهراً مجموعه $\{ (2x-5), (25-3x) \}$ دارای ۲ عضو است، اما با توجه به اینکه این مجموعه با مجموعه تک‌عضوی $\{a\}$ برابر است، پس باید $2x-5$ و $25-3x$ با همدیگر برابر باشند تا هر دو مجموعه تک‌عضوی باشند، بنابراین:

$$2x-5=25-3x \Rightarrow 2x+3x=25+5 \Rightarrow 5x=30 \Rightarrow x=\frac{30}{5}=6$$

حالا $x=6$ را در یکی از عبارت‌ها جایگذاری می‌کنیم و با عضو a از مجموعه دیگر مساوی قرار می‌دهیم: $a=2x-5=2 \times 6-5=7 \Rightarrow a=7$

زیرمجموعه

هرگاه هر عضو از مجموعه A ، عضوی از مجموعه B باشد، یا به عبارت دیگر همه عضوهای مجموعه A را از عضوهای مجموعه B انتخاب کرده باشیم، می‌گوییم A زیرمجموعه B است و با نماد ریاضی $A \subseteq B$ نشان می‌دهیم. توجه داشته باشید که اگر بتوانیم عضوی در A بیابیم که در B نباشد آنگاه A زیرمجموعه B نیست و می‌نویسیم $A \not\subseteq B$.

نکته

• اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ باشد، آنگاه $A = B$ می‌باشد.

• مجموعه تهی زیرمجموعه تمام مجموعه‌هاست و هر مجموعه، زیرمجموعه خودش است، $(A \subseteq A)$.

آنکورا

③ اگر $E = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ باشد، کدام عبارت نادرست است؟

$$\textcircled{1} \{1\} \in E \quad \textcircled{2} \{1\} \subseteq E$$

$$\textcircled{3} \{1, 2\} \in E \quad \textcircled{4} \{1, 2\} \subseteq E$$

④ گزینه ۱: عضوهای مجموعه E عبارت‌اند از: ۱، ۲ و $\{1, 2\}$ ، یعنی این مجموعه ۳ عضوی است. پس داریم: $\{1, 2\} \in E$ و $1 \in E, 2 \in E$

از طرفی زیرمجموعه‌های این مجموعه عبارت‌اند از:

$$E, \{2, \{1, 2\}\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{1, 2\}, \{\{1, 2\}\}, \{2\}, \{1\}, \emptyset$$

نکته

- هر مجموعه n عضوی دارای 2^n زیرمجموعه است که نصف این زیرمجموعه‌ها، تعداد اعضای زوج و نصف دیگرشان، تعداد اعضای فرد دارند. به طور مثال مجموعه سه عضوی $A = \{x, y, z\}$ دارای $2^3 = 8$ زیرمجموعه است که ۴ تا از آنها دارای تعداد عضوهای زوج و ۴ تا هم دارای تعداد عضوهای فرد هستند. زیرمجموعه‌های مجموعه A عبارت‌اند از: $\{\}, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}$
 فرد عضو زوج عضو زوج عضو فرد عضو
- هر مجموعه n عضوی دارای n زیرمجموعه یک عضوی و $\frac{n(n-1)}{2}$ زیرمجموعه دو عضوی است.
- اگر به تعداد عضوهای یک مجموعه، n عضو اضافه شود، آنگاه تعداد زیرمجموعه‌هایش 2^n برابر می‌شود.

۱) مجموعه $\{1, \{2, 3, 4, 5\}, 5, \emptyset\}$ چند زیرمجموعه دارد؟ (ستاره ۱۵)

- ۱۶ (۱) ☐ ۶۳ (۲) ☐ ۱۵ (۳) ☐ ۳۱ (۴) ☐

۲) گزینه ۱۱۱ دقت کنید که نماد $\emptyset$ و مجموعه $\{2, 3, 4, 5\}$ هر کدام برای مجموعه داده شده یک عضو حساب می‌شوند. پس تعداد عضوهای مجموعه داده شده برابر ۴ عضو است و در نتیجه این مجموعه دارای 2^4 یعنی ۱۶ زیرمجموعه می‌باشد، در این مجموعه داریم: $\emptyset \in \{1, \{2, 3, 4, 5\}, 5, \emptyset\}$ ، $\emptyset \subseteq \{1, \{2, 3, 4, 5\}, 5, \emptyset\}$

۳) تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $n+3$ عضوی، چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $n-1$ عضوی است؟ (توان بر روی)

- ۸ (۱) ☐ ۲۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ $(n+2)$ (۴) ☐ ۱۶ (۵) ☐

۴) گزینه ۱۵۴ می‌دانیم که تعداد زیرمجموعه‌ها در هر مجموعه دلخواه برابر است با 2^n بنابراین کافی است تعداد زیرمجموعه‌های دو مجموعه $(n+3)$ و $(n-1)$ عضوی را محاسبه و برهم تقسیم کنیم. هر مجموعه $n+3$ عضوی دارای 2^{n+3} زیرمجموعه و هر مجموعه $n-1$ عضوی دارای 2^{n-1} زیرمجموعه می‌باشد، بنابراین: $2^{n+3} \div 2^{n-1} = 2^{n+3-(n-1)} = 2^{n+3-n+1} = 2^4 = 16$

۵) تعداد زیرمجموعه‌های فرد عضوی یک مجموعه ۹ عضوی، کدام است؟

- ۳۱۰ (۱) ☐ ۲۴۶ (۲) ☐ ۲۵۶ (۳) ☐ ۲۱۰ (۴) ☐

۶) گزینه ۱۱۳ طبق نکته گفته شده هر مجموعه ۹ عضوی دارای 2^9 یعنی ۵۱۲ زیرمجموعه می‌باشد که نصف این تعداد، یعنی $\frac{512}{2} = 256$ زیرمجموعه، فرد عضوی و نصف دیگر یعنی ۲۵۶ زیرمجموعه، زوج عضوی هستند.

نکته

- اگر تعداد عضوهای یک مجموعه n عضو باشد، تعداد زیرمجموعه‌هایی که شامل n عضو مشخص هستند اما b عضو مشخص را ندارند از رابطه $2^{n-(b+1)}$ به دست می‌آید. به طور مثال در مجموعه $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ تعداد زیرمجموعه‌هایی که حتماً شامل عضوهای ۲ و ۷ باشند اما عضو ۵ را نداشته باشند برابر $2^3 = 8 = 2^{5-(2+1)}$ زیرمجموعه است.

۱) مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ چند زیرمجموعه دارد به طوری که هر یک از آنها شامل a باشد و b و c را نداشته باشد؟ (توان بر روی)

- ۱۶ (۱) ☐ ۸ (۲) ☐ ۳۲ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۲) گزینه ۱۵۲ مجموعه A دارای ۶ عضو می‌باشد، می‌خواهیم تعداد زیرمجموعه‌هایی را مشخص کنیم که شامل عضو d باشند اما b و c را نداشته باشند، بنابراین طبق نکته بالا تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر $2^3 = 8 = 2^{6-(1+2)}$ تا زیرمجموعه است.

نکته

- به تمامی زیرمجموعه‌های هر مجموعه‌ای به غیر از خود آن مجموعه، زیرمجموعه‌های محض آن گفته می‌شود. به طور مثال زیرمجموعه‌های محض مجموعه $A = \{a, b\}$ ، برابر $\{\}$ ، $\{a\}$ و $\{b\}$ است. همان‌طور که می‌بینید تعداد زیرمجموعه‌های محض هر مجموعه یک واحد از کل تعداد زیرمجموعه‌های آن کمتر می‌باشد؛ یعنی تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه n عضوی برابر $2^n - 1$ می‌باشد.

(تیرمشتک)

⑥ مجموعه A دارای ۲۵۵ زیرمجموعه محض است. این مجموعه چند عضو دارد؟

۸ (۴○)

۲۵۶ (۳○)

۶ (۲○)

۶۴ (۱○)

⑦ گزینه «۴» $2^8 = 256 = 255 + 1 =$ تعداد کل زیرمجموعه‌های مجموعه A $\Rightarrow 255 =$ تعداد زیرمجموعه‌های محض مجموعه A $\Rightarrow$ تعداد عضوهای مجموعه A = ۸

نکته

• اگر مجموع تمام اعضای مجموعه عددی A برابر S باشد آنگاه مجموع اعضای تمام زیرمجموعه‌های مجموعه A برابر $S \times (2^{n-1})$ است. به طور مثال در مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ مجموع همه اعضا برابر $6 = 1 + 2 + 3 = S$ می‌باشد. بنابراین مجموع اعضای تمام زیرمجموعه‌های مجموعه A برابر $24 = 6 \times (2^{3-1})$ است.

نمایش مجموعه‌ها از زبان ریاضی به مجموعه‌های عددی

در نمایش مجموعه‌ها به زبان ریاضی، هر مجموعه دارای ۲ قسمت است. به مجموعه مقابل دقت کنید: $A = \{2x-1 \mid x \in \mathbb{Z}, x < -2\}$ ^{شرط‌ها} ^{رابطه عضوها}

عضوهای این مجموعه با رابطه $2x-1$ ساخته می‌شوند که با توجه به شرط‌های $x \in \mathbb{Z}, x < -2$ باید برای x عددهای $-3, -4, -5, \dots$ را در نظر بگیریم و در عبارت $2x-1$ جایگذاری کنیم. بنابراین: $A = \{2(-3)-1, 2(-4)-1, 2(-5)-1, \dots\} = \{-10, -13, -16, \dots\}$

گاهی عضوهای مجموعه به صورت شرط‌هایی خاص بیان می‌شوند که در تعیین اعضای مجموعه باید تمام حالت‌ها را در نظر بگیریم. به مثال زیر توجه کنید.

(تیرمشتک و درستی)

⑥ مجموعه $A = \{x^y \mid x, y \in \mathbb{Z}, xy = 4\}$ چند عضو دارد؟

۴○ پنج تا

۳○ شش تا

۲○ چهار تا

۱○ سه تا

⑦ گزینه «۲» ابتدا تمامی عددهای صحیحی که حاصل ضرب آنها برابر ۴ می‌شود را در جدول می‌نویسیم:

x	-4	-2	-1	1	2	4
y	-1	-2	-4	4	2	1

حالا با توجه به عددهای به دست آمده، تمامی حالت‌های x^y را می‌نویسیم. سپس عضوهای تکراری را حذف می‌کنیم.چهار عضوی است. $\Rightarrow A = \{((-4)^{-1}), (-2)^{-2}, (-1)^{-4}, 1^4, 2^2, 4^1\} = \{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, +1, 1, 4, 4\} = \{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1, 4\}$

نمایش مجموعه‌های اعداد به زبان ریاضی

به تکنیک‌های زیر برای پیدا کردن رابطه بین عضوهای یک مجموعه عددی توجه کنید.

۱- گاهی اوقات وقتی عضوهای مجموعه را به صورت صعودی (یعنی از کوچک به بزرگ) می‌نویسیم، فاصله بین عضوها، عدد ثابتی است. در این حالت برای نمایش عضوها می‌توانیم از مضارب همان عدد ثابت استفاده کنیم؛ مثلاً:

$$B = \{-8, -3, 2, 7, \dots, 52\} = \{5(-2)+2, 5(-1)+2, 5(0)+2, \dots, 5(10)+2\} = \{5x+2 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x < 11\}$$

(تیرمشتک)

⑥ اگر A مجموعه مضرب‌های صحیح عدد ۳ بین ۱۰ و ۱۹ باشد و مجموعه B $B = \{x \mid -3x \in A\}$ باشد، کدام است؟

۴○ $\{12, 15, 18\}$

۳○ $\{-4, -5, -6\}$

۲○ $\{-12, -15, -18\}$

۱○ $\{4, 5, 6\}$

⑦ گزینه «۳» مجموعه مضرب‌های صحیح عدد ۳ بین ۱۰ و ۱۹ عبارت‌اند از: $A = \{12, 15, 18\}$ از طرفی اگر x را عضو B در نظر بگیریم، باید $-3x$ عضو A باشد، یعنی: $-3x = 12 \Rightarrow x = -4$ و $-3x = 15 \Rightarrow x = -5$ و $-3x = 18 \Rightarrow x = -6$ بنابراین مجموعه B به صورت: $B = \{-4, -5, -6\}$ است.

۲- گاهی اوقات عضوهای مجموعه، توان‌های مختلف یک عدد هستند؛ مثلاً:

$$C = \left\{ \frac{1}{3}, 1, 3, 9, \dots, 243 \right\} = \{3^{-1}, 3^0, 3^1, 3^2, \dots, 3^5\} = \{3^x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x \leq 5\}$$

۳- گاهی اوقات عضوهای مجموعه، با عددهای مجذور کامل و یا مکعب کامل ساخته می‌شوند؛ مثلاً:

$$D = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\} = \{0^2 + 1, 1^2 + 1, 2^2 + 1, 3^2 + 1, \dots\} = \{x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{W}\}$$

$$E = \{2, 9, 28, \dots\} = \{1^3 + 1, 2^3 + 1, 3^3 + 1, \dots\} = \{x^3 + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$$

توجه: هرگاه فاصله بین اعداد به ترتیب ۱، ۳، ۵، ۷، ... (یعنی اعداد فرد متوالی) باشد، عضوهای مجموعه با کمک اعداد مربع کامل ساخته می‌شود.

(العیاذ بالله)

① مجموعه $A = \{1, 2, 4, 8, \dots, 128\}$ با علایم ریاضی برابر است با:

① $\{x^2 \mid 0 < x < 8\}$ ② $\{2^x \mid x \in \mathbb{N}, -1 < x \leq 7\}$

③ $\{2^x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 < x \leq 7\}$ ④ $\{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}, -1 < x \leq 7\}$

☑ گزینه ۳

مجموعه A را می‌توانیم به صورت $A = \{2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^7\}$ نمایش دهیم که در تمامی اعضا فقط توان تغییر کرده است. بنابراین:

$$A = \{2^x \mid x \in \mathbb{W}, x \leq 7\} = \{2^x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 < x \leq 7\}$$

(تجربیات علمی)

② مجموعه $B = \{2, 11, 101, 1001, \dots\}$ به صورت ریاضی کدام است؟

① $\{10^x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$ ② $\{10^x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\}$

③ $\{10^x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}, x \geq -1\}$ ④ $\{10^x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x < 4\}$

☑ گزینه ۳

با دقت در مجموعه B ، می‌بینید تمامی اعضا به توان‌های عدد ۱۰ نزدیک هستند. بنابراین داریم:

$$B = \{10^0 + 1, 10^1 + 1, 10^2 + 1, 10^3 + 1, \dots\} = \{10^x + 1 \mid x \in \mathbb{W}\}$$

که البته $x \in \mathbb{W}$ را می‌توانیم به صورت $(x \in \mathbb{Z}, x \geq 0)$ هم نمایش دهیم.

۴- گاهی اوقات عضوهای مجموعه شماره‌های عددی مشخص هستند؛ مثلاً:

$$F = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} = \left\{ \frac{18}{18}, \frac{18}{9}, \frac{18}{6}, \frac{18}{3}, \frac{18}{2}, \frac{18}{1} \right\} = \left\{ x \mid x \in \mathbb{N}, \frac{18}{x} \in \mathbb{N} \right\}$$

۵- گاهی اوقات عضوهای مجموعه، یکی در میان مثبت و منفی هستند، در این حالت باید از $(-1)^n$ و یا توان‌های زوج و یا فرد عددی منفی استفاده کنیم؛ مثلاً:

$$G = \{-2, 6, -12, 20, \dots, 110\} = \{(-1)^1(1 \times 2), (-1)^2(2 \times 3), (-1)^3(3 \times 4), \dots, (-1)^{10}(10 \times 11)\}$$

$$\Rightarrow G = \{(-1)^n(n \times (n+1)) \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 10\}$$

(let's try it!)

① مجموعه $A = \{-2, 4, -8, 16, \dots\}$ را به کدام صورت زیر می‌توان نوشت؟

① $\{-x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$ ② $\{-2^x \mid x \in \mathbb{N}\}$

③ $\{(-2)^x \mid x \in \mathbb{N}\}$ ④ $\{(-1)^x \times 2^x \mid x \in \mathbb{N}\}$

☑ گزینه ۳

اگر عددی منفی به توان زوج برسد، حاصل عددی مثبت و در صورتی که به توان فرد برسد، حاصل عددی منفی است. پس مجموعه A را به صورت

$$A = \{(-2)^1, (-2)^2, (-2)^3, (-2)^4, \dots\} = \{(-2)^x \mid x \in \mathbb{N}\}$$

مقابل می‌نویسیم تا بتوانیم آن را به زبان ریاضی بازنویسی کنیم:

سؤالات تکرار و راجع درس دوم

۱۱ دو مجموعه A و B برابرند، هرگاه:

۱) تمام عضوهای A در B وجود داشته باشد.

۲) هر عضو دلخواه از B در A وجود داشته باشد.

۳) هر یک زیرمجموعه دیگری باشد.

۴) تعداد عضوهای A و B برابر باشد.

۱۲ دو مجموعه $A = \{m^2 - \frac{n}{y}, \sqrt{n}\}$ و $B = \{2\}$ با هم برابرند.

(گزینه‌ها: ۱۳)

مقدار $(\frac{m}{n})^{-2}$ کدام است؟

۱) ۸

۲) ۱۶

۳) ۳۲

۴) ۶۴

۱۳ اگر $\{y-2\} = \{x-3, 4x+3\}$ باشد، مقدار y برابر است با:

(گزینه‌ها: ۱۴)

۱) -۲

۲) -۴

۳) -۳

۴) -۵

۱۴ هرگاه مجموعه‌های $A = \{x^2, \sqrt{b}, d\}$ و $B = \{-2, 4\}$ با هم

(گزینه‌ها: ۱۵)

برابر باشند، مقدار $x^2 - b$ کدام است؟

۱) ۱۲

۲) ۱۶

۳) -۱۲

۴) صفر

۱۵ دو مجموعه $\{x-y, 13\}$ و $\{x+y, 5\}$ برابر می‌باشند. $\frac{x}{y}$ کدام

(گزینه‌ها: ۱۶)

است؟

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $-\frac{9}{4}$ ۴) $-\frac{4}{9}$ ۱۶ با توجه به تساوی $\{6, 2x, 3-y\} = \{2, 5+y, -4\}$ مقدار

(گزینه‌ها: ۱۷)

عددی $x+y$ کدام گزینه است؟

۱) ۳

۲) -۳

۳) ۱

۴) -۱

۱۷ اگر $a=b$ و $c=d$ ، آنگاه مجموعه زیر با کدام یک از مجموعه‌ها

(گزینه‌ها: ۱۸)

برابر نیست؟

 $\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, a\}$ ۱) $\{\{a, b\}, \{a, a\}, \{a, c\}, b, a\}$ ۲) $\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, a\}$ ۳) $\{\{a\}, \{a, d\}, b\}$ ۴) $\{\{a, d\}, \{a\}, c\}$ ۱۸ اگر $\{k\} = \{7, 6\}$ ، $\{x+2, b+1\}$ ، $\{k\} = \{4, \{x+2, k-1\}\}$ باشد.

(گزینه‌ها: ۱۹)

حاصل $x+k-b$ کدام است؟

۱) ۸

۲) ۹

۳) ۱۲

۴) ۱۵

۱۹ اگر دو مجموعه زیر برابر باشند، آنگاه مقدار $x+y+z$ کدام است؟

(گزینه‌ها: ۲۰)

 $\{z\}$ و $\{3, \{z-1, y+1\}\}$ و $\{y+1, x+1\}$

۱) ۳

۲) ۲

۳) ۵

۴) ۶

۲۰ دو مجموعه $A = \{y, 8, z\}$ و $B = \{x, 3\}$ برابرند. بیشترین مقدار

(گزینه‌ها: ۲۱)

عبارت $x+y-z$ کدام است؟

۱) ۸

۲) ۱۳

۳) ۱۷

۴) ۱۹

۲۱ به ازای چه تعداد عدد صحیح x، دو مجموعه $A = \{1, x, x^2\}$ و

(گزینه‌ها: ۲۲)

 $B = \{y, y^2\}$ می‌توانند برابر باشند؟

۱) ۱

۲) صفر

۳) ۲

۴) ۳

۲۲ اگر a, b و c سه عدد حقیقی و $\{(a+1)^2 + 1, (b-1)^2\} = \{-1, -a^2, c\}$

آنگاه درباره دو ادعای زیر چه می‌توان گفت؟

ادعای اول، حاصل c^3 می‌تواند برابر -۱ باشد.ادعای دوم، حاصل c^4 می‌تواند برابر ۵ باشد.

(گزینه‌ها: ۲۳)

۱) هر دو ادعا درست است.

۲) فقط ادعای اول درست است.

۳) فقط ادعای دوم درست است.

۴) هر دو ادعا نادرست است.

با توجه به تعریف دو عدد هم‌رقم، به سؤال پاسخ دهید.

دو عدد را هم‌رقم می‌نامیم هرگاه مجموعه رقم‌های دو عدد برابر باشند.

برای مثال اعداد ۱۲ و ۲۱ هم‌رقم هستند چون مجموعه رقم‌های ۱۲ مجموعه $\{1, 2\}$ و مجموعه رقم‌های ۲۱ مجموعه $\{2, 1\}$ است و $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

۲۳ چند عدد سه رقمی با ۱۲۳ هم‌رقم هستند؟

(گزینه‌ها: ۲۴)

۱) ۳

۲) ۵

۳) ۸

۴) ۱۲

(پاشن ۳۹)

۳۰ کدام گزینه همواره درست است؟

- (۱) اگر $A \in B$ و $B \in C$ آنگاه $A \in C$.
(۲) اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ آنگاه $A \subseteq C$.
(۳) اگر $A \subseteq B$ و $B \in C$ آنگاه $A \subseteq C$.
(۴) اگر $A \subseteq B$ و $B \in C$ آنگاه $A \in C$.

۳۱ مجموعه تمام زیرمجموعه‌های $M = \{\{\}, \{\emptyset\}\}$ کدام گزینه

است؟ (تیرموظان)

- (۱) $\{\{\}, \{\emptyset\}, M\}$
(۲) $\{\{\{\}, \{\emptyset\}\}, \{\{\}, M\}\}$
(۳) $\{\{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\emptyset\}\}, M\}\}$
(۴) مجموعه $\emptyset$ ، تنها زیرمجموعه M است.

۳۲ تعداد زیرمجموعه‌های $B = \{\{3\}, 4\}$ چند برابر زیرمجموعه‌های

مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ می‌باشد؟ (آزمون ورودی)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۳ مجموعه A دارای 256^5 زیرمجموعه است. این مجموعه چند

زیرمجموعه دوعضوی دارد؟

- (۱) ۲۵۶ (۲) ۴۰ (۳) ۷۸۰ (۴) ۸۰۰

۳۴ چند زیرمجموعه سه‌عضوی از اعداد طبیعی وجود دارد که

حاصل ضرب اعضای آن در هم، برابر ۴۵ شود؟ (تیرموظان)

- (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

۳۵ اگر A زیرمجموعه مجموعه B باشد، مقدار b کدام است؟ (تیرموظان)

$$A = \{a, \{1, 2a + b\}\} \quad B = \{3, 2a + 1, \{-a, -b\}\}$$

- (۱) -۶ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) -۹

۳۶ مجموعه $\{2^{1390} + 2, 2^{1390} + 4, 2^{1390} + 8, \dots, 2^{1391}\}$ چند

زیرمجموعه دارد؟ (تیرموظان)

- (۱) 2^{1391} (۲) 2^{1389} (۳) 2^{1390} (۴) 2^{1388}

۳۷ مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 99\}$ چند زیرمجموعه دوعضوی به

شکل $\{x, x + 2\}$ دارد؟ (یعنی مجموعه‌های دوعضوی‌ای که در هر کدام،

اختلاف دو عضو برابر ۲ باشد.) (تیرموظان)

- (۱) ۹۹ (۲) ۹۷ (۳) ۹۸ (۴) ۹۶

۳۸ اگر $A = \{3, 2x, 2 - y\}$ و $B = \{4, 2 + y, 1\}$ باشد و بدانیم

(آزمون ورودی)

$B \subseteq A$ و $A \subseteq B$ آنگاه $x + y$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۹ با توجه به مجموعه $A = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}, 5\}$ کدام گزینه درست

است؟ (آزمون ورودی)

- (۱) $2 \in A$ (۲) $\{2, 3\} \subseteq A$
(۳) $\{1\} \in A$ (۴) $4 \subseteq A$

۴۰ اگر $A = \{1, \{1, 2\}, \{1\}, \{2\}\}$ کدام گزینه صحیح نیست؟

(آزمون ورودی)

- (۱) $\{1, 2\} \subseteq A$ (۲) $\{1\} \in A$
(۳) $\{1, 2\} \in A$ (۴) $\{1\} \subseteq A$

۴۱ اگر $A = \{\{1\}, \{1, 2\}, 1\}$ ، چند مورد از رابطه‌های زیر نادرست

است؟ (عدالت ۲۹)

- (۱) $1 \in A$ (۲) $\{1\} \subseteq A$ (۳) $\{1, 2\} \subseteq A$ (۴) $\{1, \{1, 2\}\} \subseteq A$
(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۲ اگر $A = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$ ، آنگاه کدام یک از عبارت‌های

زیر نادرست است؟ (راشنگامی ایزموظان)

- (۱) $\{a\} \subseteq A$ (۲) $\{a\} \in A$
(۳) $\{a, b\} \subseteq A$ (۴) $\{b\} \in A$

۴۳ با توجه به مجموعه $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ کدام یک از

عبارت‌های زیر نادرست است؟ (پاشن ۱۸)

- (۱) $\{\{\emptyset\}\} \in A$ (۲) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$
(۳) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in A$ (۴) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A$

۴۴ اگر $A = \{2\}$ ، $B = \{2, \{2\}\}$ و $C = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$ باشد، کدام

رابطه نادرست است؟ (آزمون)

- (۱) $B \subseteq A$ (۲) $A \subseteq B$
(۳) $A \subseteq B$ (۴) $B \subseteq C$

۴۵ با فرض $2 \in A$ و $1 \subseteq A$ و $n(A) = 3$ ، مجموعه A کدام یک از

گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟ (آزمون - ۴)

- (۱) $\{1, 1, 2\}$ (۲) $\{1, 2, 3\}$
(۳) $\{1, 2, 5\}$ (۴) $\{1, 3, 4, 5\}$

۴۸. یک مجموعه ۶ عضوی است که جمع عضوهای آن ۴۰ است.

مجموع عضوهای همه زیرمجموعه‌های A چقدر است؟ (ازمون ورودی)

۱۳۲۰ (۱) ☐ ۱۲۸۰ (۲) ☐

۱۰۲۰ (۳) ☐ ۹۸۰ (۴) ☐

۴۹. اگر به مجموعه A دو عضو جدید اضافه کنیم، به تعداد

زیرمجموعه‌های آن ۹۶ واحد اضافه می‌شود. مجموعه A چند عضو دارد؟

۴ (۱) ☐ ۵ (۲) ☐ (مجموع)

۶ (۳) ☐ ۷ (۴) ☐

۵۰. مجموع تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه k عضوی و $k+1$

عضوی ۴۸ می‌باشد. مقدار k کدام است؟ (ازمون ورودی)

۸ (۱) ☐ ۴ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۲ (۴) ☐

۵۱. چند زیرمجموعه از مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ حداقل ۳ عضو

دارند؟ (ازمون ورودی)

۱۰۲۴ (۱) ☐ ۹۶۹ (۲) ☐ ۹۶۸ (۳) ☐ ۹۲۴ (۴) ☐

۵۲. تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ که

بزرگ‌ترین عضو آن ۷ می‌باشد برابر است با. (ازمون ورودی)

۱۲۸ (۱) ☐ ۶۴ (۲) ☐ ۳۲ (۳) ☐ ۸ (۴) ☐

۵۳. مجموعه $\{a, b, \{a\}, \{b\}\}$ دارای چند زیرمجموعه شامل عضو a

می‌باشد؟ (آلکس)

۴ (۱) ☐ ۸ (۲) ☐ ۱۰ (۳) ☐ ۱۲ (۴) ☐

۵۴. چند زیرمجموعه از زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

شامل عضوهای ۲ و ۵ هستند؟ (ازمون ورودی)

۸ (۱) ☐ ۱۶ (۲) ☐ ۳۲ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۵۵. در مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ چند زیرمجموعه می‌توان

نوشت که a عضو آن باشد ولی b عضو آن نباشد؟ (ازمون ورودی)

۱۵ (۱) ☐ ۱۴ (۲) ☐ ۱۳ (۳) ☐ ۱۶ (۴) ☐

۵۶. مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 7\}$ چند زیرمجموعه سه‌عضوی دارد که

شامل ۴ و فاقد ۷ و ۵ می‌باشد؟ (ازمون ورودی)

۶ (۱) ☐ ۸ (۲) ☐ ۱۶ (۳) ☐ ۱۸ (۴) ☐

۵۷. مجموعه $A = \{1, 2, \dots, 18\}$ مفروض است. چند زیرمجموعه

حداکثر ۵ عضوی از A می‌توان نوشت که شامل اعضای ۱ و ۲ و ۳ باشند؟

(پایش ۹۴)

۱۲۰ (۱) ☐ ۱۲۱ (۲) ☐ ۱۲۲ (۳) ☐ ۱۲۳ (۴) ☐

۵۸. چند مجموعه A می‌توان نوشت که رابطه زیر برای آن برقرار باشد؟

$\{1, 2, 3, \dots, 10\} \supseteq A \supseteq \{2, 4, 6, 8\}$ (ازمون ورودی)

۶ (۱) ☐ ۸ (۲) ☐ ۱۰ (۳) ☐

۶۴ (۴) ☐ ۱۲۸ (۵) ☐

۵۹. چند مجموعه مانند C وجود دارد که در رابطه زیر صدق کند؟

$\{2, 5\} \subseteq C \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (ماتسکار المیز ۹۳)

۴ (۱) ☐ ۸ (۲) ☐

۱۶ (۳) ☐ ۳۲ (۴) ☐

۶۰. مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ چند زیرمجموعه دارد که

کوچک‌ترین عضو آن عدد ۱ و بزرگ‌ترین عضو آن عدد ۱۰ باشد؟

(آلکس ۹۳)

۲^۹ (۱) ☐ ۲^۸ (۲) ☐

۲^۷ (۳) ☐ ۲^۶ (۴) ☐

۶۱. در چند زیرمجموعه از مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ مجموع

بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو برابر ۱۱ می‌باشد؟ (انتخاب ریاضی)

۳۲۰ (۱) ☐ ۳۲۸ (۲) ☐ ۳۴۱ (۳) ☐ ۳۵۲ (۴) ☐

۶۲. مجموعه A، دقیقاً ۳ زیرمجموعه دو عضوی دارد که هر دو عضو

آنها اول هستند و همچنین دقیقاً ۱۵ زیرمجموعه غیرتهی دارد که هیچ عضو

آنها اول نیستند. در این صورت $n(A)$ برابر است با. (المپادان ریاضی ۹۱)

۵ (۱) ☐ ۶ (۲) ☐ ۷ (۳) ☐ ۸ (۴) ☐

۶۳. در چند زیرمجموعه از اعداد طبیعی یک‌رقمی، حداقل یک عدد اول

وجود دارد؟ (تربیان شرقی ۹۵)

۴۸۰ (۱) ☐ ۲۴۰ (۲) ☐ ۶۴ (۳) ☐ ۱۶ (۴) ☐

۶۴. چند زیرمجموعه از مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ می‌توان

نوشت که هر دوتای آنها حداقل در ۲ عضو مشترک باشند؟ (پایش ۹۵)

۲۴ (۱) ☐ ۲۳ (۲) ☐ ۲۲ (۳) ☐ ۲۱ (۴) ☐

۷۵ اگر مجموعه اعداد اول و $A = \{x \mid x \in P, x < \sqrt{1000}\}$ باشد،

(تیرموشان)

کدام گزینه درست است؟

(۱) $A \subseteq P$

(۲) $P \subseteq A$

(۳) $A = P$

(۴) مجموعه A و P عضو مشترک ندارند.

۷۶ مجموعه $A = \{x^2 \mid x, y \in \mathbb{Z}, xy = 8\}$ چند زیرمجموعه دوعضوی

(آزمون ورودی)

دارد؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۷۷ مجموعه $A = \{\sqrt{x^2 + 1} \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x < 3\}$ چند زیرمجموعه

(آزمون ورودی)

دارد؟

(۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۲۲

۷۸ اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 < (x-3)^2 < 10\}$ آنگاه حاصل جمع عضوهای

(آزمون ورودی)

مجموعه A کدام است؟

(۱) ۳۶ (۲) ۴۲ (۳) ۴۹ (۴) صفر

۷۹ اگر $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 20\}$ و $B = \{3x-7 \mid x \in A\}$ و $B \subseteq A$ باشند،

(آزمون ورودی)

مجموعه B چند عضو دارد؟

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۱۰ (۴) ۲۰

۷۵ مجموعه $A = \{2^{x+y} \mid x, y \in \mathbb{Z}, -4 \leq 2x \leq 2, xy = 12\}$ چند

(آزمون ورودی)

زیرمجموعه دارد؟

(۱) ۱۶ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) ۳۲

۷۶ تعداد اعضای مجموعه $A = \{5x^2 - 3 \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 - 1 < 18\}$

(آزمون ورودی)

برابر است با:

(۱) ۸ (۲) ۴ (۳) ۹ (۴) ۵

۷۷ اگر $A = \{-x^2 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x < 3\}$ و $B = \{-x^2 \mid x \in A\}$ باشد،

(تیرموشان)

کدام گزینه عضوهای مجموعه B را نشان می‌دهد؟

(۱) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

(۲) $\{-3, 1, 0\}$

(۳) $\{-1, 0, 2, 7\}$

(۴) $\{-8, -1, 0, 1, 8\}$

با توجه به تعریف زنجیر به سؤال زیر پاسخ دهید.



اگر A یک مجموعه باشد، به مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های A که بین هر دو عضو آن رابطه زیرمجموعه $(\subseteq)$ برقرار باشد، یک «زنجیر» می‌گویند. برای مثال، اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، آنگاه مجموعه زیر، یک زنجیر سه عضوی از مجموعه A است.

$\{\{1\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3\}\}$

زیرا: $\{1, 3\} \subseteq \{1, 3, 4\}, \{1\} \subseteq \{1, 3, 4\}, \{1\} \subseteq \{1, 3\}$

۷۵ فرض کنید $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ دو زیرمجموعه $\{1\}$ و

$\{1, 3, 7\}$ از مجموعه M را در نظر بگیرید. حداکثر چند زیرمجموعه

دیگر از M به همراه این دو زیرمجموعه، تشکیل یک زنجیر می‌دهند؟

(رایش آگهی تیرموشان)

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۷۶ کدام یک از گزینه‌های زیر نمی‌تواند نمایش یک مجموعه باشد؟

(افراسان رفیعی ۹۶)



(۱) دو ورزشکار مشهور (۲) $\{2\}$

(۳) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 7\}$ (۴) $\{1, 2, \{1, 2\}\}$

۷۷ چند تا از مجموعه‌های زیر، فقط یک زیرمجموعه دارد؟ (افراسان رفیعی ۹۶)

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3}\}$ $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -\sqrt{2} < x < 0\}$

$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid \sqrt{2} < x < \sqrt{3}\}$

(۱) صفر (۲) یک

(۳) دو (۴) سه

۷۸ تعداد عضوهای کدام یک از مجموعه‌های زیر از بقیه بیشتر است؟

(آزمون ۹۶)

(۱) $A = \{2x + 1399 \mid x \in \mathbb{N}, x < 3\}$

(۲) $B = \{x \mid x^2 \in \mathbb{Z}, -5 < x < 5\}$

(۳) $C = \{\frac{x}{2} \mid \sqrt{x} \in \mathbb{N}, x^2 < 100\}$

(۴) $D = \{2x \mid x \in \mathbb{N}, x < 25\}$

۷۹ نمایش مجموعه زیر مساوی با کدام یک از مجموعه‌های زیر

(آزمون ریاضی)

است؟ $A = \{x \mid \sqrt{x} \in \mathbb{N}\}$

(۱) $\{1, 2, 3, \dots\}$ (۲) $\{1, 4, 9, \dots\}$

(۳) $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots\}$ (۴) $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

۸۴ کدام مجموعه زیر با عضوهایش هم‌خوانی ندارد؟ (ایزوگوشان)

(۱) $\{n^2 + 1 | n \in \mathbb{W}\} = \{1, 2, 5, 10, 17, \dots\}$

(۲) $\{n(n+2) | n \in \mathbb{N}\} = \{3, 8, 15, 24, 35, \dots\}$

(۳) $\{(-n)^7 | n \in \mathbb{N}, 9 < n < 15\} = \{-196, -169, -144, -121, -100\}$

(۴) $\{\frac{n}{n^2+1} | n \in \mathbb{Z}, -4 < n < 4\} = \{-\frac{3}{10}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}\}$

۸۵ مجموعه $\{2, 6, 12, 20, \dots\}$ به صورت نماد ریاضی کدام گزینه

(ازجمله ۳۰)

است؟

(۱) $\{n^2 + 1 | n \in \mathbb{N}\}$

(۲) $\{n^2 + 2n | n \in \mathbb{N}\}$

(۳) $\{n(n+1) | n \in \mathbb{N}\}$

(۴) $\{n(n+1) | n \in \mathbb{Z}\}$

۸۶ مجموعه‌های A و M را در نظر بگیرید. مجموعه A چند عضو دارد؟

$A = \{x = \frac{k}{k^2} | x \in \mathbb{Z}, k \in M\}$ و $M = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$

(ازجمله ۳۱)

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۸۷ مجموعه $A = \{\frac{2^k}{k^2} | k \in \mathbb{N}, k \leq 6\}$ چند عضو دارد؟ (ام ۳۰)

(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) بی‌شمار

۸۸ اگر $A = \{x^T | x \in \mathbb{Z}, x^T < 17\}$ باشد، مجموعه A چند زیرمجموعه

(مانندگرمیز ۳۹)

نا تهی دارد؟

(۱) ۳

(۲) ۵

(۳) ۷

(۴) ۸

۸۹ رضا و سعید در یک بازی دوتفره شرکت می‌کنند. سعید روی

تعدادی کارت، اعدادی را می‌نویسد و رضا باید مجموعه‌ای به زبان ریاضی

برای اعداد روی آن کارت‌ها بیان کند. اگر سعید ۷ کارت با اعداد ۶۴ و ۲

و ۴ و ۱۶ و ۸ و ۳۲ و ۱ به رضا بدهد و رضا جواب‌های زیر را اعلام کند.

چند تا از پاسخ‌های رضا درست است؟

$A = \{2^{x-1} | x \in \mathbb{N}, x < 8\}$ ، $B = \{2^{y-x} | x \in \mathbb{N}, x \leq 7\}$

$C = \{3^x | x \in \mathbb{W}, x < 7\}$ ، $D = \{x \in \mathbb{N} | \frac{64}{x} \in \mathbb{N}\}$

(پاشنه ۳۹)

(۱) یکی

(۲) دوتا

(۳) سه‌تا

(۴) چهارتا

۹۰ کدام گزینه نمایش مجموعه $\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots\}$ با

(ازجمله ۳۱)

نمادهای ریاضی است؟

(۱) $\{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{N}\}$

(۲) $\{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{N}, b > a\}$

(۳) $\{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{N}, b \geq 2\}$

(۴) $\{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{N}, b = a + 1\}$

۹۱ مجموعه $A = \{0, 1, 3, 7, \dots\}$ با علامت ریاضی برابر است یا.

(ازجمله ۳۱)

(۱) $A = \{2^x - 1 | x \in \mathbb{N}\}$

(۲) $A = \{2^x - 1 | x \in \mathbb{W}\}$

(۳) $A = \{2^x - 1 | x \in \mathbb{Z}\}$

(۴) $A = \{2^x - 1 | x \in \mathbb{R}\}$

۹۲ نمایش عددی مجموعه $\{x-1 | x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$ کدام گزینه

(ازجمله ۳۱)

است؟

(۱) $\{0, 1, 2\}$

(۲) $\{1, 2, 3\}$

(۳) $\{0, 1\}$

(۴) $\{1, 2\}$

۹۳ نمایش مجموعه $A = \{x^T | \frac{x}{T} \in \mathbb{N}, 1 < x < 8\}$ با عضوهایش در

(ازجمله ۳۱)

کدام گزینه نوشته شده است؟

(۱) $\{8, 64, 216, 512\}$

(۲) $\{8, 64, 216, 512\}$

(۳) $\{2, 4, 6\}$

(۴) $\{6, 12, 18\}$

۹۴ کدام مجموعه زیر تهی است؟ (ازجمله ۳۱)

(۱) $A = \{\sqrt{-x} | x \in \mathbb{Z}, x \leq -1\}$

(۲) $B = \{x | x \in \mathbb{Z}, 5^x = 2^x\}$

(۳) $C = \{x | x \in \mathbb{Z}, -x > x\}$

(۴) $D = \{x | x \in \mathbb{Z}, x^2 + 1 = -1\}$

۹۵ کدام مجموعه، نمایش ریاضی مجموعه زیر است؟

(ازجمله ۳۱)

$A = \{7, 77, 777, 7777, \dots\}$

(۱) $\{7 \times \frac{10^x - 1}{9} | x \in \mathbb{N}\}$

(۲) $\{7 \times \frac{10^x - 1}{9} | x \in \mathbb{Z}\}$

(۳) $\{7 \times \frac{10^x - 1}{9} | x \in \mathbb{W}\}$

(۴) $\{7 \times \frac{10^x - 1}{9} | x \in \mathbb{N}\}$

با توجه به تعریف پادزنجیر، به سؤال زیر پاسخ دهید.

اگر A یک مجموعه باشد، به مجموعه‌ای از زیر مجموعه‌های A که بین هیچ دو عضو آن رابطه زیرمجموعه برقرار نباشد، پادزنجیر می‌گویند. برای مثال اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، آنگاه مجموعه زیر، یک پادزنجیر سه عضوی است.

$\{\{1\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$

طولانی‌ترین پادزنجیر که با زیرمجموعه‌های مجموعه

$\{x \mid x \in \mathbb{N}, \frac{16}{x} \in \mathbb{N}\}$ ساخته می‌شود، چند عضوی است؟ (پایان ۶۸)

۶ (۱) ۱۰ (۲)

۱۵ (۳) ۲۰ (۴)

مجموعه $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ را یک «مجموعه جذاب»

می‌نامیم، در صورتی که ۳ شرط زیر را دارا باشد. (پایان ۶۵)

شرط اول، $A \subseteq \mathbb{N}$

شرط دوم، اعضای مجموعه A ، از کوچک به بزرگ مرتب شده باشد.

شرط سوم، به ازای هر دو عضو متوالی آن مانند a_i و a_{i+1} داشته باشیم:

$$(a_i, a_{i+1}) = 1$$

چند تا از مجموعه‌های زیر جذاب هستند؟

$$A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{189}{x} \in \mathbb{N}\}$$

$$C = \{2k-7 \mid k \in \mathbb{N}, 10 \leq k \leq 90\}$$

۱ (۱) ۲ (۲)

۳ (۳) ۴ (۴) صفر

چند تا از مجموعه‌های زیر با مجموعه $\{\frac{9}{7}, \frac{10}{3}, \frac{11}{4}, \dots, \frac{1399}{1392}\}$

(پایان ۶۶)

برابر است؟

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid \frac{1399}{1392} \leq x \leq \frac{9}{7}\}$$

$$B = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, 9 \leq m < 1400, 1 < n \leq 1392\}$$

$$C = \{\frac{x+9}{x+7} \mid x \in \mathbb{W}, x \leq 1399\}$$

۱ (۱) ۲ (۲) دوتا

۳ (۳) سه تا ۴ (۴) هیچی

کدام مجموعه نشان‌دهنده اعضای مجموعه زیر می‌باشد؟

$$\{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \times n \mid n \in \mathbb{W}, n \leq 5\}$$

(پایان ۶۶)

۱ (۱) $\{0, 1, 2, -3, -4, 5\}$

۲ (۲) $\{0, -1, +2, 3, -4, -5\}$

۳ (۳) $\{0, 1, -2, -3, 4, 5\}$

۴ (۴) $\{0, -1, -2, 3, 4, -5\}$

اگر $A = \{\sqrt{a} \mid a \in \mathbb{M}\}$ و $M = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 10\}$ ، آنگاه

(پایان ۶۷)

چند عضو صحیح دارد؟

۳ (۱) ۴ (۲)

۵ (۳) بی‌شمار (۴)

اگر A مجموعه اعداد طبیعی فرد یک‌رقمی باشد و داشته باشیم:

$$B = \{ab \mid \{a, b\} \subseteq A, a \neq b\}$$

(پایان ۶۸)

آنگاه تعداد اعضای مجموعه B برابر است با:

۱۰ (۱) ۲۵ (۲)

۱۲ (۳) ۹ (۴)

فرض کنید n یک عدد ثابت، $A = \{3x+n \mid x \in \mathbb{Z}\}$ و $-22 \in A$.

اگر $\{a, b\} \subseteq A$ ، آنگاه $a+b$ به چند تا از مجموعه‌های زیر می‌تواند

(پایان ۶۹)

تعلق داشته باشد؟

$$\{1358, 1388, 1334\} \text{ (ب) } \{1395, 1438, 2017\} \text{ (آ)}$$

۱ (۱) فقط به مجموعه «آ» تعلق دارد.

۲ (۲) فقط به مجموعه «ب» تعلق دارد.

۳ (۳) به هر دو مجموعه تعلق دارد.

۴ (۴) به هیچ کدام تعلق ندارد.

گزینه ۲: می دانیم که $\{\}$ و $\emptyset$ نمادهای مجموعه تهی هستند، پس با یکدیگر برابرند بنابراین: $A = \{\{\}, \emptyset\} = \{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}$ لذا این مجموعه یک عضو دارد.

گزینه ۷: می دانیم $\{\} = \{\{\}\}$ و $\emptyset = \{\}$ است، بنابراین: $A = \{\emptyset, \{\emptyset, \emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset, \emptyset\}\}$ بنابراین مجموعه A ۴ عضو دارد.

گزینه ۸: بررسی گزینه ها:
 $\{\} =$ اعداد طبیعی کوچک تر از ۱
 $\{\} =$ اعداد طبیعی بین ۳ و ۴
 $\{1\} =$ اعدادی که نه اول و نه مرکب هستند.
 $\{2, 3, 5, 7\} =$ اعداد اول یک رقمی
 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} =$ مضرب های صحیح عدد ۱۰
 بنابراین گزینه ۸ «نشان دهنده مجموعه یک عضوی است»

گزینه ۱۱: مجموعه A فقط شامل یک عضو است که خود همین عضو، مجموعه اعداد طبیعی می باشد.

گزینه ۱۳: آموختیم که در هر مجموعه عضو تکراری بی تأثیر است و باید عضوهای تکراری را حذف کنیم، بنابراین مجموعه A را به صورت زیر می نویسیم که دارای ۶ عضو می باشد.
 $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

گزینه ۱۵: در عبارت های A_1, A_2, A_3 و ... به اعداد ۱، ۲، ۳ و ... اندیس گفته می شود. با دقت در مجموعه ها ملاحظه می کنید که تعداد عضوهای هر مجموعه برابر اندیس آن مجموعه است. به طور مثال، مجموعه A_1 دارای یک عضو، مجموعه A_2 دارای ۲ عضو و ... می باشد. به عبارت های زیر دقت کنید:
 بزرگ ترین عضو مجموعه $A_2 \Rightarrow n(A_2) = 1 + 2 = 3$
 بزرگ ترین عضو مجموعه $A_3 \Rightarrow n(A_3) = 1 + 2 + 3 = 6$
 اگر به همین ترتیب بتوانیم بزرگ ترین عضو مجموعه A_9 را تعیین کنیم، به سادگی مشخص می شود که مجموعه A_9 یا چه عددی شروع می شود:

$$n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + \dots + n(A_9) = 1 + 2 + 3 + \dots + 9$$

$$= \frac{9 \times 10}{2} = 45$$

پس ۴۵ بزرگ ترین عضو مجموعه A_9 است و کوچک ترین عضو A_1 برابر عدد ۱ می باشد.

گزینه ۱۴: روش اول: اگر علامت عددها را در نظر بگیریم، فاصله بین هر دو جمله متوالی برابر ۵ است، پس داریم:
 $\{5 \times 1 - 3, -(5 \times 2 - 3), 5 \times 3 - 3, \dots, 5 \times 41 - 3\}$
 همان طور که می بینید جملات با شماره فرد، مثبت هستند، بنابراین:
 $152 = 5 \times 31 - 3 = 155 - 3 = 152$

فصل اول: مجموعه ها

گزینه ۱: $\{\} =$ اعداد اول بین ۲۴ و ۲۸
 در گزینه های دیگر هر کس به صورت سلیقه ای پاسخ می دهد، لذا مجموعه ریاضی تشکیل نمی شود.

گزینه ۱۶: در گزینه ۱۶ چون به صورت سلیقه ای پاسخ می دهیم لذا مجموعه ریاضی تشکیل نمی شود.
 بررسی سایر گزینه ها:
 $\{\} =$ اعداد طبیعی کوچک تر از ۱
 $\{\} =$ اعداد طبیعی بین ۳ و ۴
 $\{4, 5\} =$ دو عدد صحیح بین ۳ و ۴

گزینه ۲۳: بررسی عبارت ها:
 ا عدد ۱۱، عددی اول است و شمارنده مرکب ندارد، لذا مجموعه شمارنده های مرکب عدد ۱۱ مجموعه تهی می باشد.

ب) بی شمار عدد گویای کوچک تر از ۱ - وجود دارد که نمایش این مجموعه با اعضایش امکان پذیر نمی باشد اما می توانیم آن را با نماد ریاضی نشان دهیم که در درس های بعدی می آموزید:
 $\{x \mid x \in \mathbb{Q}, x < -1\} =$ اعداد گویای کمتر از ۱ -
 پ) می دانیم بین هر دو عدد گنگ، بی شمار عدد گنگ دیگر وجود دارد، لذا برای انتخاب پنج عدد گنگ بین $\sqrt{17}$ و $\sqrt{23}$ باید به صورت سلیقه ای عمل کنیم پس در این مورد مجموعه ریاضی تشکیل نمی شود.

گزینه ۲۵: اعداد طبیعی عبارت اند از ۱، ۲، ۳، ۴، ... به این ترتیب ملاحظه می کنید که هیچ عدد طبیعی بین ۱ و ۱ - قرار ندارد لذا این مجموعه تهی است.
 بررسی سایر گزینه ها:
 ۱) بین هر دو عدد گویا بی شمار عدد گویای دیگر وجود دارد، پس این مجموعه بی شمار عضو دارد و مجموعه تهی نیست.
 ۲) تنها مضرب اول هر عدد اولی خودش است، پس این گزینه، مجموعه $\{2\}$ را معرفی می کند و تهی نیست.
 ۳) بین هر دو عدد حقیقی بی شمار عدد حقیقی دیگر وجود دارد، پس این مجموعه بی شمار عضو دارد و مجموعه تهی نیست.

گزینه ۲۶: بررسی سایر گزینه ها:
 ۱) اعداد طبیعی دو رقمی حداکثر مقدار ۹۹ دارند، پس نمی توانند بیش از ۱۰۰ شمارنده داشته باشند.
 ۲) اعداد گویا دارای صورت و مخرج صحیح هستند، پس مجموع صورت و مخرج آنها عددی صحیح خواهد بود.
 ۳) هر عدد صحیحی یا زوج است یا فرد؛ بنابراین عدد صحیحی که نه زوج باشد و نه فرد وجود ندارد.

گزینه ۲۷: روش اول: اگر علامت عددها را در نظر بگیریم، فاصله بین هر دو جمله متوالی برابر ۵ است، پس داریم:
 $\{5 \times 1 - 3, -(5 \times 2 - 3), 5 \times 3 - 3, \dots, 5 \times 41 - 3\}$
 همان طور که می بینید جملات با شماره فرد، مثبت هستند، بنابراین:
 $152 = 5 \times 31 - 3 = 155 - 3 = 152$

گزینه ۲۸: روش اول: اگر علامت عددها را در نظر بگیریم، فاصله بین هر دو جمله متوالی برابر ۵ است، پس داریم:
 $\{5 \times 1 - 3, -(5 \times 2 - 3), 5 \times 3 - 3, \dots, 5 \times 41 - 3\}$
 همان طور که می بینید جملات با شماره فرد، مثبت هستند، بنابراین:
 $152 = 5 \times 31 - 3 = 155 - 3 = 152$

گزینه «۲»

با توجه به اینکه $5 \in M$ ، کافی است که هر یک از عضوهای مجموعه M را برابر با ۵ قرار دهیم اما توجه داشته باشید که $7 \in M$ پس نباید هیچ یک از عضوهای مجموعه M برابر ۷ باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$5 \in M \Rightarrow a = 5, \quad a + 1 = 5 \Rightarrow a = 4, \quad a - 2 = 5 \Rightarrow a = 7,$$

$$a + 3 = 5 \Rightarrow a = 2$$

$$7 \in M \Rightarrow a \neq 7, \quad a + 1 \neq 7 \Rightarrow a \neq 6, \quad a - 2 \neq 7 \Rightarrow a \neq 9,$$

$$a + 3 \neq 7 \Rightarrow a \neq 4$$

با مقایسه مقادیر به دست آمده نتیجه می شود که a نباید برابر با ۷ و یا ۴ باشد، پس a می تواند هر یک از مقادیر ۵ یا ۲ باشد.

گزینه «۴»

طبق نمودار ون داده شده، عدد مورد نظر باید مضرب ۷ و ۱۲ باشد ولی مضرب ۹ نباشد، بنابراین عدد مورد نظر باید حتماً بر سه عدد ۴، ۳ و ۷ بخش پذیر باشد، اما بر ۹ بخش پذیر نباشد که در بین گزینه ها فقط عدد ۱۶۸ چنین است.

گزینه «۳»

دو مجموعه A و B زمانی برابر هستند که هر عضو A ، عضوی از B و هر عضو B ، عضوی از A باشد. به این ترتیب اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ باشد، آنگاه هر دو مجموعه برابر هستند.

گزینه «۲» با توجه به تساوی دو مجموعه A و B نتیجه می شود که هر دو عضو مجموعه A ، برابر ۲ هستند.

$$\sqrt{n} = 2 \Rightarrow n = 4$$

$$m^2 - \frac{n}{4} = 2 \Rightarrow m^2 - \frac{4}{4} = 2 \Rightarrow m^2 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow m = \sqrt{3}$$

در فصل توان می آموزید که در هر عدد توان دار با معکوس کردن پایه، توان آن قرینه می شود. بنابراین:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{-2} = \left(\frac{n}{m}\right)^2 = \frac{n^2}{m^2} = \frac{4^2}{3} = \frac{16}{3}$$

گزینه «۳»

با توجه به اینکه مجموعه $\{y-2\}$ ، یک عضوی است، پس باید هر دو عضو مجموعه $\{x-3, 4x+3\}$ با یکدیگر برابر باشند، بنابراین:

$$4x+3 = x-3 \Rightarrow 4x-x = -3-3 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = \frac{-6}{3} = -2$$

با جایگذاری $x = -2$ در مجموعه $\{x-3, 4x+3\}$ نتیجه می شود که این مجموعه برابر $\{-5\} = \{-2-3, 4(-2)+3\}$ است. بنابراین باید $\{y-2\} = \{-5\}$ باشد:

$$y-2 = -5 \Rightarrow y = -5+2 = -3$$

روش دوم: عضوهایی که شماره آنها فرد است یعنی اولین عضو، سومین عضو، پنجمین عضو و...، عددهای زوج هستند پس گزینه های «۱» و «۲» حذف می شوند. از طرفی عضوهایی که شماره فرد هستند، عددهای مثبت می باشند، پس گزینه «۳» هم حذف می شود.

گزینه «۱» می دانیم که $2^{400} + 2^{400} = 2 \times 2^{400} = 2^{401}$ است، بنابراین می توانیم مجموعه A را به صورت زیر بنویسیم:

$$A = \{2^{400} + 2, 2^{400} + 4, 2^{400} + 6, \dots, 2^{400} + 2^{400}\}$$

حال اگر از تمام عضوها، عبارت 2^{400} را حذف کنیم، مجموعه $B = \{2, 4, 6, \dots, 2^{400}\}$ به دست می آید که نشان دهنده عددهای زوج تا 2^{400} است و تعداد عضوهایش با مجموعه A برابر می باشد. پس:

$$n(A) = 2^{400} = 2 - 2^{399}$$

$$2^{401} = 2^{400} + 2^{400}$$

گزینه «۴»

مجموعه A را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$A = \{2^{100} + 2^1, 2^{100} + 2^2, 2^{100} + 2^3, \dots, 2^{100} + 2^{100}\}$$

اگر از تمام عضوها، عبارت 2^{100} را کنار بگذاریم، مجموعه $B = \{2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{100}\}$ به دست می آید که تعداد عضوهایش با توجه به توان ها، برابر 100 عضو است، پس مجموعه A هم دارای 100 عضو می باشد.

گزینه «۲»

در سال های قبل آموخته ایم که $(a^b)^m = a^{bm}$ است، بنابراین:

$$27^{25} = (3^3)^{25} = 3^{75}, \quad 9^{25} = (3^2)^{25} = 3^{50}$$

همچنین اگر x مثبت و n عدد زوج باشد آنگاه $\sqrt[n]{x^n} = x^{\frac{n}{n}} = x$ است، در نتیجه $\sqrt[100]{3^{100}} = 3^{\frac{100}{100}} = 3^1 = 3$ می تأثیر است. داریم:

$$A = \{3^{50}, 3^{50}, 3^{50}, 3^{75}\} = \{3^{50}, 3^{75}\}$$

$$n(A) = 2$$

بنابراین:

گزینه «۲»

$$\text{مجموعه اعداد طبیعی دورقمی} = \{10, 11, 12, 13, 14, \dots, 99\}$$

حالا اگر مجموع ارقام هر عدد را از خود عدد کم کنیم عضوهای مجموعه A به دست می آیند، به این ترتیب خواهیم داشت:

$$A = \{10 - (1+0) = 9, 11 - (1+1) = 9, \dots, 19 - (1+9) = 9,$$

$$20 - (2+0) = 18, 21 - (2+1) = 18, \dots, 29 - (2+9) = 18,$$

$$30 - (3+0) = 27, 31 - (3+1) = 27, \dots, 99 - (9+9) = 81\}$$

به این ترتیب می بینید عضوهای مجموعه A همان مضرب های طبیعی عدد ۹ و کوچک تر از ۱۰۰ هستند، بنابراین با حذف عضوهای تکراری داریم:

$$A = \{9, 18, 27, \dots, 81\} \Rightarrow n(A) = 9$$

گزینه ۲۲

$$\{7, \{x+2, k-1\}, \{k\}\} = \{\{7, 6\}, \{x+2\}, b+1\}$$

با مقایسهٔ عضوهای هر دو مجموعه نتیجه می شود که:

$$b+1=7 \Rightarrow b=6$$

$$\{x+2\} = \{k\} \Rightarrow x+2=k$$

$$\{x+2, k-1\} = \{7, 6\} \Rightarrow k=7$$

$$x+2=k \xrightarrow{k=7} x+2=7 \Rightarrow x=5 \Rightarrow x+k-b = \frac{5+7}{12} - 6 = 9$$

گزینه ۲۷

تساوی عضو بدون $\{ \}$: $x+1=3 \Rightarrow x=2$

تساوی یک عضو داخل $\{ \}$: $\{y+1\} = \{z\} \Rightarrow y+1=z$

تساوی دو عضو داخل $\{ \}$: $\{2, 1\} = \{z-1, y+1\}$

$$\xrightarrow{z=y+1} \{2, 1\} = \{y, y+1\} \Rightarrow y=1 \xrightarrow{y+1=z} z=2$$

$$x+y+z=2+1+2=5$$

گزینه ۲۸: مجموعه $A = \{x, 3\}$ دارای دو عضو است اما مجموعه

$A = \{y, 8, z\}$ در ظاهر سه عضوی است، با توجه به تساوی این دو

مجموعه، نتیجه می شود که مجموعه $A = \{y, 8, z\}$ نیز باید دارای دو

عضو باشد، بنابراین در این مجموعه دو تا از اعضا برابر هستند. با توجه به

تساوی دو مجموعه داریم: $\{x, 3\} = \{y, 8, z\} \Rightarrow x=8$

از طرفی برای اینکه مقدار عبارت $x+y-z$ بیشترین مقدار ممکن باشد

باید $x=y=8$ و $z=3$ باشد، بنابراین: $x+y-z=8+8-3=13$

گزینه ۲۹: اگر $y=1$ باشد، آنگاه $y^2=1$ خواهد شد و در نتیجه

$B = \{1\}$ است، پس در مجموعه A داریم: $x=1$ و در نتیجه $A = \{1\}$.

اگر $y^2=1$ باشد، آنگاه $y=+1$ و $y=-1$ خواهد شد که $y=1$ را در

قسمت بالا بررسی کردیم حال اگر $y=-1$ باشد، آنگاه داریم:

$$B = \{(-1), (-1)^2\} = \{-1, 1\}$$

در نتیجه در مجموعه A باید $x=-1$ باشد، به این ترتیب $x^2 = (-1)^2 = 1$

خواهد شد و مجموعه A هم شامل دو عضو $+1$ و -1 می شود و این

مجموعه هم دو عضوی خواهد شد.

$A = \{+1, -1\}$

پس طبق آنچه گفته شد، x می تواند $+1$ یا -1 باشد.

گزینه ۳۰: یا توجه به اینکه عبارت $(a+1)^2 + 1$ همواره مثبت و

عبارت a^2 (بخوانید: قرینه a^2) همواره نامنت است پس $(a+1)^2 + 1 = c$

می باشد، در نتیجه باید $(b-1)^2$ و a^2 برابر -1 باشند، بنابراین:

$$(b-1)^2 = -1 = (-1)^2 \Rightarrow b-1 = -1 \Rightarrow b=0$$

$$-a^2 = -1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = -1, a = 1$$

گزینه ۳۳

دو مجموعه یا یکدیگر برابرند، پس باید عضوهای هر دو مجموعه یکسان

باشند، می دانیم حاصل عبارت های $\sqrt{b}$ و x^2 همواره نامنفی (یعنی صفر

یا مثبت) است، بنابراین با توجه به مجموعه $B = \{-2, 4\}$ باید $x^2 = 4$

و $\sqrt{b} = 4$ باشد، پس k هم برابر -2 می شود.

$$\sqrt{b} = 4 \Rightarrow b = 16, x^2 = 4$$

$$x^2 - b = 4 - 16 = -12$$

گزینه ۳۴: با توجه به اینکه دو مجموعه برابرند، باید عضوهای هر دو

مجموعه یکسان باشند، بنابراین:

$$\{x+y, 5\} = \{x-y, 13\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x+y=13 \\ x-y=5 \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{را جمع می کنیم}]{\text{طرفین هر دو تساوی}} x+y+x-y=13+5 \Rightarrow 2x=18 \Rightarrow x=\frac{18}{2} \Rightarrow x=9$$

حالا با جایگذاری $x=9$ در یکی از تساوی های $x+y=13$ یا $x-y=5$

مقدار y را به دست می آوریم:

$$x+y=13 \xrightarrow{x=9} 9+y=13 \Rightarrow y=13-9 \Rightarrow y=4$$

$$\frac{x}{y} = \frac{9}{4}$$

گزینه ۳۷

$$\{2, 5+y, -4\} = \{6, 2x, 3-y\}$$

با توجه به تساوی دو مجموعه، باید $5+y=6$ باشد، پس:

$$5+y=6 \Rightarrow y=6-5 \Rightarrow y=1$$

حال $y=1$ را در مجموعه ها جایگذاری می کنیم:

$$\{2, \frac{5+1}{2}, -4\} = \{6, 2x, \frac{3-1}{2}\} \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$$

بنابراین:

$$x+y = -2+1 = -1$$

گزینه ۳۵: مجموعه های داده شده را با جایگذاری a و c به ترتیب

به جای b و d می نویسیم:

$$\{\{a\}, \{a, b\}, \{\{a, b, c\}, a\}\}$$

$$= \{\{a\}, \{a, a\}, \{\{a, a, c\}, a\}\} = \{\{a\}, \{\{a, c\}, a\}\}$$

$$\text{گزینه ۳۶: } \{\{a, b\}, \{a, a\}, \{\{a, c\}, b, a\}\}$$

$$= \{\{a, a\}, \{a, a\}, \{\{a, c\}, a, a\}\} = \{\{a\}, \{\{a, c\}, a\}\}$$

$$\text{گزینه ۳۷: } \{\{a\}, \{a, b\}, \{\{a, c\}, a\}\}$$

$$= \{\{a\}, \{a, a\}, \{\{a, c\}, a\}\} = \{\{a\}, \{\{a, c\}, a\}\}$$

$$\text{گزینه ۳۸: } \{\{a\}, \{\{a, d\}, b\}\} = \{\{a\}, \{\{a, c\}, a\}\}$$

$$\text{گزینه ۳۹: } \{\{a, c\}, \{\{a\}, a\}\}$$

$$\begin{cases} A = \{2\} \\ B = \{2, \{2\}\} \end{cases} \Rightarrow \{2\} \subseteq \{2, \{2\}\} \Rightarrow A \subseteq B$$

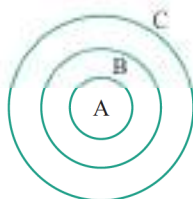
گزینه «۱»

گزینه «۳» بررسی گزینه‌ها:

۱ و ۴) $n(A) = 2$ پس این مجموعه ۲ عضوی است و نمی‌تواند با مجموعه دو عضوی $\{1, 2\} = \{1, 3\}$ و یا مجموعه چهار عضوی $\{1, 2, 4, 5\}$ برابر باشد.

۲) $2 \in A$ پس ۲ نمی‌تواند عضو این مجموعه باشد.
۳) $\{1\} \subseteq A$ در نتیجه $1 \in A$ است، پس مجموعه سه عضوی $\{1, 2, 5\}$ می‌تواند مجموعه A باشد.

گزینه «۴» فرض $A \subseteq B$ با فرض $A \subseteq B$ هر عضو A در مجموعه B قرار دارد و یا فرض $B \subseteq C$ هر عضو B در مجموعه C قرار دارد پس هر عضو A در مجموعه C وجود دارد و $A \subseteq C$ خواهد بود. نمودار و $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ نیز به صورت زیر است که نتیجه می‌دهد A داخل C قرار دارد یعنی $A \subseteq C$.



گزینه «۲»

مجموعه M دارای دو عضو $\{ \}$ و $\{ \emptyset \}$ می‌باشد، پس برای این مجموعه باید چهار زیرمجموعه بنویسیم که به این ترتیب گزینه «۲» درست است.

گزینه «۲»

مجموعه B دارای ۲ عضو است، پس این مجموعه دارای 2^2 یعنی ۴ زیرمجموعه است. از طرفی مجموعه A دارای یک عضو است که خود این عضو، مجموعه‌ای ده عضوی است ولی این ده عضو تأثیری در تعداد عضوهای مجموعه A ندارند و در نتیجه مجموعه تک‌عضوی A دارای $2^1 = 2$ زیرمجموعه است. پس تعداد زیرمجموعه‌های B ، ۲ برابر تعداد زیرمجموعه‌های A است.

گزینه «۳» می‌دانیم که اگر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه برابر 2^n باشد، آن مجموعه دارای n عضو است پس ابتدا تعداد زیر

مجموعه‌های مجموعه A را به صورت توانی از ۲ می‌نویسیم تا بتوانیم تعداد عضوهایش را تعیین کنیم. $n(A) = 40 \Rightarrow 2^{40} = 2^{10 \times 4} = (2^{10})^4 = 1024^4$

از طرفی آموختیم که هر مجموعه n عضوی دارای $\frac{n(n-1)}{2}$ زیرمجموعه دو عضوی است، بنابراین:

$$\frac{20 \times 19}{2} = 190 \quad \text{تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی } A$$

$$a=1 \Rightarrow (a+1)^2 + 1 = (1+1)^2 + 1 = 5 \Rightarrow c=5 \Rightarrow c^b = 5^1 = 5$$

$$a=-1 \Rightarrow (a+1)^2 + 1 = (-1+1)^2 + 1 = 1 \Rightarrow c=1 \Rightarrow c^b = 1^{-1} = 1$$

بنابراین فقط ادعای دوم درست است.

گزینه «۲»

عدد‌های ۱۲۲، ۲۳۱، ۳۱۲، ۳۲۱ با عدد ۱۲۳ هم‌رقم هستند و به صورت $\{1, 2, 3\}$ خواهند بود. (جابه‌جایی اعضا تأثیری در مجموعه ندارد.)

گزینه «۲»

وقتی $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ باشد، یعنی $A = B$ است، پس با توجه به تساوی مجموعه‌ها داریم:

$$\{2, 2x, 2-y\} = \{4, 2+y, 1\} \Rightarrow 2+y=2 \Rightarrow y=0$$

حال $y=1$ را در مجموعه‌ها جایگذاری می‌کنیم:

$$\{3, 2x, 1\} = \{4, 3, 1\} \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$$

$$x+y=2+1=3$$

بنابراین:

گزینه «۲»

دقت کنید که عضوهای مجموعه A عبارت‌اند از ۵، $\{2, 3, 4\}$ و $\{1\}$. پس گزینه «۳» صحیح است.

گزینه «۱»

مجموعه A دارای ۴ عضو ۱، $\{1, 2\}$ ، $\{1\}$ و $\{2\}$ است، پس $\{2\} \in A$ ، $\{1\} \in A$ ، $\{1, 2\} \in A$ و $1 \in A$ ، بنابراین گزینه‌های «۲» و «۳» درست و گزینه «۱» نادرست است.

دقت کنید $\{\{1, 2\}\} \subseteq A$.

تذکر: مجموعه تهی، زیرمجموعه تمام مجموعه‌هاست.

گزینه «۱»

مجموعه A دارای سه عضو است و داریم: $1 \in A$ ، $\{1, 2\} \in A$ ، $\{1\} \in A$. به این ترتیب اگر هر یک از این اعضا را داخل آکولاد قرار دهیم، به زیرمجموعه‌های تک‌عضوی تبدیل می‌شوند. در نتیجه داریم:

$$\{\{1\}\} \subseteq A, \{\{1, 2\}\} \subseteq A, \{1\} \subseteq A$$

لذا عبارت‌های $\{1\} \in A$ ، $\{1\} \subseteq A$ و $\{1, \{1, 2\}\} \subseteq A$ درست هستند و عبارت $\{1, 2\} \subseteq A$ نادرست است.

گزینه «۴» مجموعه A دارای ۴ عضو a ، b ، $\{a\}$ و $\{a, b\}$ است.لذا عبارت $\{b\} \in A$ نادرست است.گزینه «۱» مجموعه A دارای ۳ عضو $\emptyset$ ، $\{\emptyset\}$ و $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ است،

پس عضو $\{\{\emptyset\}\}$ ندارد و اگر هر یک از این اعضا را داخل آکولاد قرار دهیم، به زیرمجموعه‌های تک‌عضوی تبدیل می‌شوند.

حالا به نکته زیر دقت کنید:

نکته: هر عضو دلخواه از مجموعه n عضوی مانند A ، در 2^{n-1} زیرمجموعه وجود دارد پس اگر مجموع عضوهای A برابر M باشد، مجموع تمام عضوهای زیرمجموعه‌های A برابر $2^{n-1} \times M$ خواهد شد.

طبق نکته بالا، چون مجموع عضوهای مجموعه A برابر $40 = 6 + n(A)$ می‌باشد، پس:

$$1280 = 2^{6-1} \times 40 = 22 \times 40 = 22 \times 40 = 1280$$

گزینه ۲۵

اگر مجموعه A دارای n عضو باشد این مجموعه دارای 2^n زیرمجموعه خواهد بود حال اگر دو عضو جدید به آن اضافه کنیم، تعداد عضوهای $n+2$ و تعداد زیرمجموعه‌هایش 2^{n+2} خواهد شد از طرفی چون به تعداد زیرمجموعه‌ها ۹۶ واحد اضافه شده بنابراین $2^{n+2} - 2^n = 96$ می‌باشد، حال با حل این معادله توانی و یا با امتحان گزینه‌ها به جواب می‌رسی.

روش اول: (امتحان گزینه‌ها):

$$\text{گزینه ۱۸: } n = 4 \Rightarrow 2^{4+2} - 2^4 = 64 - 16 = 48 \neq 96$$

$$\text{گزینه ۲۲: } n = 5 \Rightarrow 2^{5+2} - 2^5 = 128 - 32 = 96 \Rightarrow \text{جواب}$$

روش دوم: (روش جبری):

$$2^{n+2} - 2^n = 96 \Rightarrow 2^n \times 2^2 - 2^n = 96 \Rightarrow 4 \times 2^n - 2^n = 96$$

$$\Rightarrow 3 \times 2^n = 96 \Rightarrow 2^n = \frac{96}{3} = 32 = 2^5 \Rightarrow n = 5$$

گزینه ۵۰

در این سؤال هم مانند سؤال قبلی می‌توانیم به دو روش عمل کنیم. در اینجا روش جبری را انجام می‌دهیم و امتحان گزینه‌ها به عهده شما عزیزان می‌باشد.

$$2^k = \text{تعداد زیرمجموعه‌ها} \Rightarrow \text{مجموعه } k \text{ عضو دارد.}$$

$$2^k \times 2^1 = 2^{k+1} = \text{تعداد زیرمجموعه‌ها} \Rightarrow \text{مجموعه } k+1 \text{ عضو دارد.}$$

$$2^k \times 2^1 + 2^k = 48 \Rightarrow 2^k \times \frac{(2+1)}{3} = 48 \Rightarrow 2^k = \frac{48}{3} = 16 = 2^4$$

پس $k = 4$ می‌باشد.

گزینه ۵۱

می‌دانیم که هر مجموعه n عضوی دارای یک زیرمجموعه تهی، n زیرمجموعه یک عضوی و $\frac{n(n-1)}{2}$ زیرمجموعه دو عضوی است از طرفی مجموعه A

دارای ۱۰ عضو است پس این مجموعه دارای 2^{10} یعنی ۱۰۲۴ زیرمجموعه می‌باشد که از این تعداد یک زیرمجموعه تهی، ۱۰ زیرمجموعه یک عضوی و

$$\frac{1 \times 9}{2} = 45 \text{ زیرمجموعه دو عضوی داریم. بنابراین:}$$

$$(1 + 10 + 45) = 1024 - \text{تعداد زیرمجموعه‌های دارای حداقل ۳ عضو} = 1024 - 56 = 968$$

گزینه ۲۵

می‌دانیم که در مجموعه‌ها عضو تکراری بی‌تأثیر است، همچنین با جابه‌جایی اعضا، مجموعه جدیدی حاصل نمی‌شود. از طرفی داریم:

$$1 \times 3 \times 15 = 1 \times 5 \times 9 = 45$$

بنابراین فقط مجموعه‌های $(1, 3, 15)$ و $(1, 5, 9)$ زیرمجموعه‌های سه عضوی مورد نظر هستند. توجه داشته باشید که مجموعه‌هایی مانند $\{2, 3, 5\}$ دارای دو عضو هستند زیرا باید یکی از عضوهای تکراری آنها را حذف کنیم.

گزینه ۲۵

چون $A \subseteq B$ است، پس باید عضو $\{1, 2a+b\}$ از مجموعه A ، عضوی از مجموعه B باشد، بنابراین:

$$\{1, 2a+b\} = \{-a, 0\}$$

حالا با توجه به تساوی دو مجموعه بالا در ابتدا مقدار n ، سپس مقدار b را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} -a=1 \Rightarrow a=-1 \\ 2a+b=0 \Rightarrow \frac{a-1}{2} + 2(-1) + b=0 \Rightarrow b=2 \end{cases}$$

گزینه ۱۲۲: می‌دانیم که $2^{1390} = 2 \times 2^{1389} = 2^{1389} + 2^{1389}$ پس مجموعه داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\{2^{1390} + 2^1, 2^{1390} + 2^2, 2^{1390} + 2^3, \dots, 2^{1390} + 2^{1390}\}$$

حالا اگر در تمامی عضوهای مجموعه بالا 2^{1390} را کنار بگذاریم، مجموعه $\{2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{1390}\}$ به دست می‌آید که تعداد عضوهایش با توجه به توان‌ها برابر ۱۳۹۰ عضو است و این تعداد با تعداد عضوهای مجموعه داده شده برابر است، پس تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه مورد نظر 2^{1390} می‌باشد.

گزینه ۲۷: اختلاف دو عضو باید دو واحد باشد، بنابراین تمام

مجموعه‌های دو عضوی ممکن را می‌نویسیم که عبارت‌اند از:

$$\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}, \dots, \{97, 99\}$$

با توجه به کوچک‌ترین عضو مجموعه‌ها که به ترتیب ۱، ۲، ۳، ... و ۹۷ هستند، تعداد زیرمجموعه‌های مورد نظر ۹۷ زیرمجموعه می‌باشد.

گزینه ۲۵

برای پاسخ به این سؤال یک مجموعه کوچک‌تر مانند $A = \{1, 2, 3\}$ که در آن مجموع اعضا برابر $1+2+3=6$ می‌باشد را در نظر می‌گیریم حالا تمام زیرمجموعه‌هایش را می‌نویسیم:

$$\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{2\}, \{1\}, \emptyset \text{ : زیرمجموعه‌های } A$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید در چهار تا از زیرمجموعه‌ها عضو ۱، در چهار تا از آنها عضو ۲ و در چهار تا هم عضو ۳ وجود دارد، پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که هر عضو A در 2^{3-1} یعنی ۴ زیرمجموعه دیده می‌شود و مجموع عضوهای تمام زیرمجموعه‌هایش برابر $2^{3-1} \times 6$ می‌باشد.

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی و دو عضوی یک مجموعه n عضوی به ترتیب n و $\frac{n(n-1)}{2}$ است.

گزینه «۳»

روش اول: مجموعه A شامل تمامی زیرمجموعه‌های مجموعه ده عضوی $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ می‌باشد که حتماً عددهای $2, 4, 6$ و 8 عضوهای آنها باشند، پس این 4 عضو را کنار می‌گذاریم و با 6 عضو باقیمانده یعنی $\{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ ، 2^6 یعنی 64 زیرمجموعه می‌نویسیم حالا اگر به تمام این 64 زیرمجموعه، تمامی عضوهای $2, 4, 6$ و 8 را اضافه کنیم تمام مجموعه‌هایی که می‌توانیم به جای A قرار دهیم به دست می‌آیند.

روش دوم: نکته: تعداد مجموعه‌هایی که در رابطه $X \subseteq A \subseteq Y$ صدق می‌کند از رابطه $2^{n(Y)-n(X)}$ به دست می‌آیند.

طبق نکته بالا $n(X) = 4$ و $n(Y) = 10$ می‌باشد، پس $2^{10-4} = 2^6 = 64$ مجموعه می‌توانیم به جای A قرار دهیم.

گزینه «۲»

روش اول: مجموعه C شامل تمام زیرمجموعه‌های مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ است که حتماً عددهای 5 و 2 عضوهای آنها باشند، پس این دو عضو را کنار می‌گذاریم و با 3 عضو باقیمانده یعنی $\{1, 3, 4\}$ ، $2^3 = 8$ زیرمجموعه می‌نویسیم. حالا اگر به تمام این 8 زیرمجموعه، عضوهای 2 و 5 را اضافه کنیم، تمام مجموعه‌هایی که می‌توانیم به جای C قرار دهیم، به دست می‌آیند.

نوعه: طبق نکته درسنامه، مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ دارای 5 عضو است که می‌خواهیم تعداد زیرمجموعه‌هایی را مشخص کنیم که حتماً شامل عضوهای 2 و 5 هستند، بنابراین تعداد این مجموعه‌ها برابر $2^3 = 8 = 2^{5-(2+0)}$ می‌باشد.

روش دوم: طبق نکته سؤال قبل $n(X) = 2$ و $n(Y) = 5$ می‌باشد، پس $2^{5-2} = 2^3 = 8$ مجموعه می‌توانیم به جای C قرار دهیم.

گزینه «۲»

کافی است که تعداد تمامی زیرمجموعه‌های A که حتماً شامل عضوهای 1 و 10 هستند را تعیین کنیم برای این منظور می‌توانیم به یکی از دو روش زیر عمل کنیم:

روش اول: عضوهای 1 و 10 را از مجموعه A کنار بگذاریم تا مجموعه هشت عضوی $\{2, 3, 4, \dots, 9\}$ به دست آید. حالا تمامی زیرمجموعه‌های این مجموعه را که تعداد آنها 2^8 زیرمجموعه می‌باشد بنویسیم و در تمامی آنها عضوهای 1 و 10 را اضافه کنیم.

روش دوم: با توجه به نکته درسنامه، در مجموعه 10 عضوی A به تعداد $2^{10-2} = 2^8$ یعنی 256 زیرمجموعه، حتماً شامل عضوهای 1 و 10 هستند.

گزینه «۲» زیرمجموعه 6 عضوی $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ از مجموعه A را در نظر بگیرید با این مجموعه می‌توانیم 2^6 یعنی 64 زیرمجموعه بسازیم که اگر به هر یک از این زیرمجموعه‌ها عضو 7 را هم اضافه کنیم، تمامی زیرمجموعه‌هایی از A که بزرگ‌ترین عضوشان 7 می‌باشد، به دست می‌آیند.

گزینه «۲» ابتدا در این مجموعه عضو 8 را کنار می‌گذاریم تا مجموعه $\{b, \{a\}, \{b\}\}$ به دست آید، حالا تمام زیرمجموعه‌های آن را می‌نویسیم، چون این مجموعه دارای 3 عضو می‌باشد، پس تعداد زیرمجموعه‌هایش برابر 2^3 یعنی 8 زیرمجموعه است. حالا به تمام زیرمجموعه‌ها عضو 8 را اضافه می‌کنیم، به این ترتیب 8 زیرمجموعه حتماً دارای عضو 8 خواهند شد.

گزینه «۲» در این سؤال هم مانند سؤال قبل عمل می‌کنیم. ابتدا از مجموعه A ، عضوهای 2 و 5 را کنار می‌گذاریم تا مجموعه 4 عضوی $\{1, 3, 4, 6\}$ به دست آید. حالا تمام زیرمجموعه‌های این مجموعه چهارعضوی را می‌نویسیم که 2^4 یعنی 16 زیرمجموعه می‌شود حالا به تمام این 16 زیرمجموعه، عضوهای 2 و 5 را اضافه می‌کنیم.

گزینه «۴»

ابتدا در مجموعه A ، عضوهای a و b را کنار می‌گذاریم تا مجموعه چهارعضوی $\{c, d, e, f\}$ به دست آید، حالا تمام زیرمجموعه‌های این مجموعه چهارعضوی که 2^4 یعنی 16 زیرمجموعه می‌باشد را می‌نویسیم و به تمام آنها فقط عضو a را اضافه می‌کنیم.

گزینه «۱»

ابتدا در این مجموعه، عضوهای $4, 5$ و 7 را کنار می‌گذاریم تا مجموعه 4 عضوی $\{1, 2, 3, 6\}$ به دست آید. حالا تمام زیرمجموعه‌های دوعضوی این مجموعه را می‌نویسیم و به تمام آنها فقط عضو 4 را اضافه می‌کنیم. می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی یک مجموعه n عضوی برابر $\frac{n(n-1)}{2}$ است، پس این مجموعه $6 = \frac{4 \times 3}{2}$ زیرمجموعه دوعضوی دارد.

گزینه «۲»

زیرمجموعه حداکثر 5 عضوی از A که شامل $1, 2$ و 3 باشد سه صورت دارد:

۱- زیرمجموعه 3 عضوی باشد که فقط یک حالت $\{1, 2, 3\}$ دارد.

۲- زیرمجموعه 4 عضوی باشد یعنی از بین 15 عضو $4, 5, \dots$ و 18 فقط یک عضو دیگر کنار $1, 2, 3$ قرار بگیرد که به تعداد زیرمجموعه یک عضوی از اعضای باقیمانده یعنی 15 حالت امکان‌پذیر است.

۳- زیرمجموعه 5 عضوی باشد یعنی از بین 15 عضو $4, 5, \dots$ و 18 فقط دو عضو دیگر در کنار $1, 2, 3$ قرار بگیرد که به تعداد زیرمجموعه 2 عضوی از اعضای باقیمانده یعنی $105 = \frac{15 \times 14}{2}$ حالت امکان‌پذیر است.

پس کل حالات $1 + 15 + 105 = 121$

گزینه ۳۸

می‌دانیم که $11 = 1 + 10$ می‌باشد، در ابتدا تعداد تمام زیرمجموعه‌های A که شامل عضوهای 1 و 10 می‌باشد را حساب می‌کنیم که برابر 2^8 زیرمجموعه می‌باشد. از طرفی $11 = 2 + 9$ است، در اینجا هم تعداد تمام زیرمجموعه‌های A که شامل عضوهای 2 و 9 هستند ولی 1 و 10 را ندارند حساب می‌کنیم که برابر 2^8 زیرمجموعه می‌باشد. همچنین $11 = 3 + 8$ است، باز هم تعداد زیرمجموعه‌های A که شامل 3 و 8 هستند اما عضوهای 1 ، 2 ، 9 و 10 را ندارند حساب می‌کنیم که برابر 2^8 زیرمجموعه می‌باشد، از طرفی $11 = 4 + 7$ می‌باشد و تعداد زیرمجموعه‌های A که شامل 4 و 7 هستند اما عضوهای 1 ، 2 ، 3 ، 8 ، 9 و 10 را ندارند حساب می‌کنیم که برابر 2^8 یعنی 4 زیرمجموعه است و در آخر می‌دانیم که $11 = 5 + 6$ است و فقط مجموعه $\{5, 6\}$ وجود دارد که شامل 5 و 6 می‌باشد و هیچ عضو دیگری ندارد. بنابراین در کل به تعداد $1 + 2^8 + 2^8 + 2^8 + 2^8 + 1 = 341$ زیرمجموعه وجود دارند که مجموع بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آنها 11 می‌باشد.

گزینه ۳۹

گزینه ۳۸: با توجه به اینکه دقیقاً در 3 زیرمجموعه دو عضوی A هر دو عضو آن اول هستند، پس 3 تا از عضوهای مجموعه A عدد اول هستند. از آن جایی که مجموعه A ، 15 زیرمجموعه غیرتهی دارد بدون احتساب آن سه عضو که اول هستند، پس با اضافه کردن مجموعه تهی $\{1\}$ (زیرمجموعه) می‌توانیم تعداد اعضای آن را پیدا کنیم: $2^n = 2^4 \Rightarrow n = 4$ پس مجموعه A دارای $4 + 2 = 6$ عضو است. می‌توانید مجموعه A را به صورت $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ در نظر بگیرید.

گزینه ۴۰

$\{1, 2, 3, 4, \dots, 9\} =$ مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی
 $2^9 = 512 =$ تعداد کل زیرمجموعه $\Rightarrow$
 حالا با اعداد طبیعی یک رقمی غیر اول مجموعه زیر را تشکیل می‌دهیم و تعداد تمامی زیرمجموعه‌های آن را مشخص می‌کنیم.
 $\{1, 4, 6, 8, 9\} =$ مجموعه اعداد طبیعی غیر اول یک رقمی
 $2^5 = 32 =$ تعداد کل زیرمجموعه‌ها $\Rightarrow$
 در تمام این 32 زیرمجموعه، هیچ عدد اولی دیده نمی‌شود که اگر این تعداد را از 512 کم کنیم تعداد زیرمجموعه‌هایی که حداقل یک عضو اول دارند، مشخص می‌شود:
 $512 - 32 = 480$

گزینه ۴۱

گزینه ۴۱: کافی است زیرمجموعه‌های 6 عضوی، 5 عضوی و 4 عضوی مجموعه A را در نظر بگیریم. تعداد زیرمجموعه‌های 6 عضوی، فقط خود A است؛ تعداد زیرمجموعه‌های 5 عضوی و 4 عضوی به ترتیب مثل تعداد زیرمجموعه‌های 1 عضوی (یعنی $n = 6$) و 2 عضوی (یعنی $n = 5$) است؛ بنابراین: $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$ $15 + 6 + 1 = 22$

گزینه ۴۲: زیر مجموعه‌های $\emptyset$ ، $\{1, 2\}$ ، $\{1, 3, 4, 5, 6\}$ ، $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ به همراه 2 مجموعه داده شده، تشکیل یک زنجیر می‌دهند.
 تذکر: در نوشتن زیرمجموعه‌ها می‌توانستیم به جای $\{1, 2\}$ ، $\{1, 3\}$ را در نظر بگیریم.

گزینه ۴۳: در گزینه ۱۸ دو ورزشکار مشهدی به صورت سلیقه‌ای انتخاب می‌شوند بنابراین این عبارت نمی‌تواند نمایش یک مجموعه باشد. بررسی سایر گزینه‌ها:
 ۱۲ از نمودار ون برای نمایش مجموعه استفاده کرده است.
 ۲ $\{x \in \mathbb{N} | x \geq 7\} = \{7, 8, 9, \dots\}$ است، بنابراین یک مجموعه را نمایش می‌دهد.
 ۱۴ یک مجموعه با سه عضو 1 ، 2 و 3 است.

گزینه ۴۴

در سال‌های قبل با محاسبه مقدار تقریبی جذر عددها آشنا شده‌اید و آموختید که $\sqrt{2} = 1/4$ و $\sqrt{3} = 1/7$. حالا در مجموعه A با توجه به اینکه $x \in \mathbb{N}$ و $1/4 \leq x \leq 1/7$ است، خواهیم داشت $A = \{1\}$. پس A فقط یک زیرمجموعه (تهی) دارد. در مجموعه B با توجه به اینکه $x \in \mathbb{Z}$ و $-1/4 < x < 0$ می‌باشد خواهیم داشت $B = \{-1\}$. پس B دو زیرمجموعه دارد. در مجموعه C با توجه به اینکه $x \in \mathbb{Q}$ و با توجه به اینکه بین هر دو عدد گنگ بی‌شمار عدد گنگ دیگر وجود دارد پس مجموعه C دارای بی‌شمار عضو و بی‌شمار زیرمجموعه است. بنابراین فقط مجموعه A دارای یک زیرمجموعه است.

تذکر: به اعداد $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{2}/5$ ، $\sqrt{2}/11$ ، $\sqrt{3}$ و ... که مقدار دقیق اعشاری ندارند و حاصل آنها با هیچ عدد گویایی برابر نیست عدد گنگ می‌گوییم.

گزینه ۴۵: در مجموعه B ، باید اعدادی بین -5 و $+5$ را بنویسیم که مجذور آنها صحیح باشد $(x^2 \in \mathbb{Z})$ ، بنابراین:

$$B = \{x | x^2 \in \mathbb{Z}, -5 < x < 5\}$$

$$= \{\pm\sqrt{1}, \pm\sqrt{4}, \pm\sqrt{9}, \dots, \pm\sqrt{25}\} \Rightarrow n(B) = 10$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

$$1) A = \{2x + 1399 | x \in \mathbb{N}, x < 3\} = \{2 \times 1 + 1399, 2 \times 2 + 1399\}$$

$$= \{1401, 1403\} \Rightarrow n(A) = 2$$

$$2) C = \left\{ \frac{x}{4} | \sqrt{x} \in \mathbb{N}, x^2 < 100 \right\} = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{4}{4}, \frac{9}{4} \right\} \Rightarrow n(C) = 3$$

$$4) D = \{2x | x \in \mathbb{N}, x < 25\} = \{2 \times 1, 2 \times 2, 2 \times 3, \dots, 2 \times 24\}$$

$$= \{2, 4, 6, \dots, 48\} \Rightarrow n(D) = 24$$

گزینه «۲»

باید توجه داشته باشید که اعداد منفی جذر ندارند، از طرفی وقتی $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$ ، یعنی باید x مجذور کامل باشد، پس باید $x = 1, 4, 9, 16, \dots$ باشد.

گزینه «۲»

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 20\} = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$$

$$B = \{2x - 7 \mid x \in A\} = \{2(1) - 7, 2(2) - 7, 2(3) - 7, \dots, 2(20) - 7\}$$

$$= \{-5, -3, -1, 1, 3, \dots, 23\}$$

چون B زیرمجموعه A است، پس از بین عددهای بالا عضوایی را انتخاب می‌کنیم که عضو A هم باشند. بنابراین:

$$B = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20\} \Rightarrow n(B) = 7$$

گزینه «۲»

$$-4 \leq 2x \leq 2 \xrightarrow{+2} -2 \leq x \leq 1 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = -2, -1, 0, 1$$

چون $xy = 12$ می‌باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=12 \end{cases}, \begin{cases} x=-1 \\ y=-12 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases}, \begin{cases} x=-2 \\ y=-6 \end{cases}$$

حالا مجموعه A را با عضوهایش می‌نویسیم:

$$A = \{2^3(-2)(-6), 2^3(-1)(-12), 2^3(1)(6), 2^3(2)(3)\} = \{2^{12}, 2^{15}, 2^{15}, 2^{15}\}$$

مجموعه A دارای ۳ عضو است، پس این مجموعه دارای 2^3 یعنی ۸ زیرمجموعه می‌باشد.

گزینه «۴»

ابتدا تمامی عددهای صحیح ممکن را که وقتی از مجذور آنها یک واحد کم کنیم، کوچک‌تر از ۱۸ می‌شوند، تعیین می‌کنیم:

$$x^2 - 1 < 18 \Rightarrow x^2 < 18 + 1 \Rightarrow x^2 < 19$$

$$\xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

می‌دانیم که $(-2)^2 = 2^2 = 4$ ، $(-3)^2 = 3^2 = 9$ ، $(-4)^2 = 4^2 = 16$ ، $(-1)^2 = 1^2 = 0$ ، $(0)^2 = 0^2 = 0$ می‌باشند، بنابراین:

$$A = \{5 \times 256 - 3, 5 \times 81 - 3, 5 \times 16 - 3, 5 \times 1 - 3, 5 \times 0 - 3\}$$

$$= \{1277, 402, 77, 2, -3\} \Rightarrow n(A) = 5$$

گزینه «۳»

$$x = -2, -1, 0, 1, 2$$

$$A = \{-x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 2\}$$

$$= \{-(-2)^2 + 1, -(1)^2 + 1, -(0)^2 + 1, -(-1)^2 + 1, -(2)^2 + 1\}$$

$$= \{-3, -1, 1, -1, -3\} \Rightarrow A = \{-3, -1, 1\}$$

عضوهای مجموعه B ، قرینه مکعب عضوهای A هستند، بنابراین:

$$B = \{-(-3)^3, -(1)^3, -(1)^3\} = \{27, 0, -1\}$$

گزینه «۴»

سورت کسرها عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳ و ... و مخرج هر کسریک واحد بیشتر از صورت آن می‌باشد، بنابراین می‌توانیم مجموعه را به صورت $\{\frac{a}{a+1} \mid a \in \mathbb{N}\}$ بنویسیم که این مجموعه با مجموعه $\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}, b = a+1\}$ برابر است.

گزینه «۱»

گزینه «۱» با توجه به اینکه تمام عضوهای مجموعه A ، عدد اول کوچک‌تر از $\sqrt{8000}$ هستند پس حتماً A زیرمجموعه‌ای از P است، در نتیجه $A \subseteq P$ درست است.

گزینه «۳»

گزینه «۳» با توجه به اینکه x و y عددهای صحیح هستند و با استفاده از جدول زیر تمام حالت‌های ممکن برای x و y را تعیین می‌کنیم.

x	۱	۲	۴	۸	-۱	-۲	-۴	-۸
y	۸	۴	۲	۱	-۸	-۴	-۲	-۱

حالا تمام x^y ها را حساب می‌کنیم و به عنوان عضو A قرار می‌دهیم، توجه داشته باشید که عضوهای تکراری را حذف می‌کنیم.

$$A = \{1^8, 2^8, 4^8, 8^8, (-1)^{-8}, (-2)^{-8}, (-4)^{-8}, (-8)^{-8}\}$$

$$= \{1, 16, 8, \frac{1}{16}, -\frac{1}{8}\}$$

مجموعه A دارای ۵ عضو است، پس این مجموعه دارای $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ زیرمجموعه دو عضوی می‌باشد.

گزینه «۲»

گزینه «۲» با توجه به شرط‌های داده شده برای مجموعه، تمامی عددهای صحیح $-2, -1, 0, 1, 2$ را برای x انتخاب می‌کنیم و در رابطه $\sqrt{x^2 + 1}$ به جای آن قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{(-2)^2 + 1} = \sqrt{5}, \sqrt{(-1)^2 + 1} = \sqrt{2}, \sqrt{0^2 + 1} = 1$$

$$\sqrt{1^2 + 1} = \sqrt{2}, \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$$

$$A = \{\sqrt{5}, \sqrt{2}, 1\}$$

همان طور که ملاحظه می‌کنید، مجموعه A دارای ۳ عضو است، پس این مجموعه 2^3 یعنی ۸ زیرمجموعه دارد.

گزینه «۱»

باید برای x عددهای صحیحی را انتخاب کنیم که وقتی ۳ واحد از آنها کم می‌کنیم و بعد عدد حاصل را به توان ۲ می‌رسانیم، حاصل عددی بین ۱۰ تا ۱۰۰ شود. به این ترتیب تمامی عددهای ۱۲، ۱۱، ۸، ۷، ۱، ۰، ۵، ۶ را می‌توانیم برای x انتخاب کنیم.

توجه داشته باشید که اگر $x = -6$ و یا $x = 12$ باشد، خواهیم داشت:

$$10 < (-6 - 3)^2 = (12 - 3)^2 = 81 < 100$$

حالا مجموعه A را با عضوهایش نمایش می‌دهیم:

$$A = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 11, 12\}$$

$$A = \{-6 + (-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 5 + 6 + 7 + 8 + 11 + 12\}$$

$$= -21 + 57 = 36$$

گزینه ۸۵»

$$\{2, 6, 12, 20, \dots\} = \{1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, 4 \times 5, \dots\} \\ = \{n(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

گزینه ۸۶»

با توجه به اینکه $x = \frac{k+k}{k^2+k} = \frac{1}{k}$ و چون $k \in M$ و $x \in \mathbb{Z}$ است، پس باید از بین اعضای مجموعه M ، عضوایی را انتخاب کنیم که معکوس آنها نیز عدد صحیح باشند:

$$-\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}, -\frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}, -\frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}, \frac{1}{5} \in \mathbb{Z}, \frac{1}{4} \in \mathbb{Z}, \frac{1}{3} \in \mathbb{Z}$$

بنابراین $A = \{-1, +1\}$ دارای ۲ عضو است.

گزینه ۸۷»

با توجه به اینکه $k \leq 6$ و $k \in \mathbb{N}$ می‌باشد، پس k برابر عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ می‌باشد. حالا با جایگذاری این مقادیر به جای k در عبارت $\frac{y^k}{k^2}$ ، عضوهای مجموعه A را تعیین می‌کنیم.

$$A = \left\{ \frac{y^1}{1^2}, \frac{y^2}{2^2}, \frac{y^3}{3^2}, \frac{y^4}{4^2}, \frac{y^5}{5^2}, \frac{y^6}{6^2} \right\} \\ = \left\{ \frac{y}{1}, \frac{y^2}{4}, \frac{y^3}{9}, \frac{y^4}{16}, \frac{y^5}{25}, \frac{y^6}{36} \right\} = \left\{ 2, 1, \frac{8}{9}, 1, \frac{32}{25}, \frac{16}{9} \right\} \\ = \left\{ 2, 1, \frac{8}{9}, \frac{32}{25}, \frac{16}{9} \right\} \Rightarrow n(A) = 5$$

گزینه ۸۸»

در بین اعداد صحیح اگر عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را به توان ۴ برسانیم مقدار حاصل کمتر از ۱۷ خواهد شد.

$$A = \{(-2)^4, (-1)^4, 1^4, 2^4, 3^4\} = \{4, 1, 16, 81, 81\}$$

بنابراین: که این مجموعه دارای ۲ یعنی ۸ زیرمجموعه می‌باشد که از این تعداد فقط یک زیرمجموعه تهی و بقیه آنها یعنی ۷ زیرمجموعه دیگر ناتهی هستند.

گزینه ۸۹»

$$A = \{2^{x-1} \mid x \in \mathbb{N}, x < 8\} = \{2^{1-1}, 2^{2-1}, 2^{3-1}, \dots, 2^{7-1}\} \\ = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$$

$$B = \{2^{y-x} \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 7\} = \{2^{7-1}, 2^{7-2}, \dots, 2^{7-7}\} \\ = \{64, 32, 16, 8, 4, 2, 1\}$$

$$C = \{2^x \mid x \in \mathbb{W}, x < 7\} = \{2^0, 2^1, \dots, 2^6\} \\ = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{64}{x} \in \mathbb{N} \right\} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$$

هر چهار مجموعه دارای عضوهای ۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶، ۳۲ و ۶۴ است.

(جابه جایی اعضا اهمیت ندارد.)

گزینه ۹۰»

$$A = \{2^x - 1 \mid x \in \mathbb{W}\}$$

گزینه ۹۱» با توجه به اینکه $x \in \mathbb{N}$ و $x \leq 3$ می‌باشد، بنابراین x برابر عددهای ۱، ۲ و ۳ می‌باشد، حالا با جایگذاری این مقادیر به جای x ، اعضای این مجموعه را می‌نویسیم: $\{1-1, 2-1, 3-1\} = \{0, 1, 2\}$

گزینه ۹۲» با توجه به اینکه باید $\frac{x}{y}$ عددی طبیعی باشد، پس باید x عددی زوج باشد از طرفی $1 < x < 8$ است، بنابراین می‌توانیم عددهای ۲، ۴ و ۶ را برای x در نظر بگیریم. حالا مجموعه A را با اعضایش نمایش می‌دهیم.

$$A = \{2^2, 4^2, 6^2\} = \{4, 16, 36\}$$

گزینه ۹۳»

هر یک از مجموعه‌ها را با عضوهایشان نمایش می‌دهیم

$$A = \{x = 0, -1, -2, \dots\} \\ A = \{\sqrt{-x} \mid x \in \mathbb{Z}, x \leq 0\} \\ = \{\sqrt{-0}, \sqrt{-(-1)}, \sqrt{-(-2)}, \sqrt{-(-3)}, \dots\} \\ = \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots\}$$

۲) می‌دانیم که هر عددی (به غیر از صفر) به توان صفر برابر ۱ می‌شود.

$$2^0 = 5^0 = 1 \Rightarrow B = \{1\}$$

۳) عددهای صحیح عضو مجموعه C هستند که قریبه آنها از خودشان بزرگ‌تر است، پس:

$$C = \{-1, -2, -3, \dots\}$$

۴) می‌دانیم که مجذور هر عددی همواره نامنفی است یعنی $x^2 \geq 0$ می‌باشد، حالا اگر یک واحد به x^2 اضافه کنیم آنگاه $x^2 + 1 > 0$ پس

$x^2 + 1$ هیچ‌گاه صفر نمی‌شود، به عبارت دیگر هیچ عددی وجود ندارد که یک واحد بیشتر از مجذور آن، مساوی صفر شود. پس این مجموعه تهی می‌باشد، یعنی: $D = \{\}$

گزینه ۹۴»

$$A = \{7 \times 1, 7 \times 11, 7 \times 111, \dots\} = \left\{ 7 \times \frac{9}{9}, 7 \times \frac{99}{9}, 7 \times \frac{999}{9}, \dots \right\} \\ = \left\{ 7 \times \frac{10^1 - 1}{9}, 7 \times \frac{10^2 - 1}{9}, 7 \times \frac{10^3 - 1}{9}, \dots \right\} = \left\{ 7 \times \frac{10^x - 1}{9} \mid x \in \mathbb{N} \right\}$$

گزینه ۹۵»

می‌دانیم که مجذور هر عددی همواره نامنفی است، بنابراین $(-n)^2 \geq 0$ است پس در گزینه ۹۳ تمامی اعضا باید نامنفی باشند. بنابراین عضوهای این مجموعه اشتباه نوشته شده‌اند و باید به صورت زیر باشند:

$$\begin{aligned} n=1, 11, 12, 13, 14 \\ \{(-n)^2 \mid n \in \mathbb{N}, 9 < n < 15\} \\ = \{(-10)^2, (-11)^2, (-12)^2, (-13)^2, (-14)^2\} \\ = \{100, 121, 144, 169, 196\} \end{aligned}$$

گزینه ۴۳

مجموعه A شامل بی‌شمار عدد گویا از $\frac{1399}{1393}$ تا $\frac{9}{3}$ هست و با مجموعه داده شده برابر نیست.

در مجموعه B عضوایی مانند $\frac{9}{3} + \frac{9}{3} + \frac{9}{3} + \frac{9}{3}$ و $\frac{9}{3993}$ وجود دارد که فقط $\frac{9}{3}$ در مجموعه داده شده است، بنابراین با مجموعه داده شده برابر نیست.

مجموعه C عضوی مانند $\frac{1399+9}{1399+3}$ دارد که در مجموعه داده شده نیست.

گزینه ۴۴

$$\frac{n(n+1)}{2} \times n \mid n \in \mathbb{W}, n \leq 5$$

$$= \{(-1)^{\frac{1 \times 2}{2}} \times 1, (-1)^{\frac{2 \times 3}{2}} \times 2, (-1)^{\frac{3 \times 4}{2}} \times 3, (-1)^{\frac{4 \times 5}{2}} \times 4, (-1)^{\frac{5 \times 6}{2}} \times 5\} = \{-1, -2, 3, 4, -5\}$$

گزینه ۴۵

گزینه ۲۵: مجموعه $M = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 10\}$ شامل هر عدد حقیقی کمتر از ۱۰ می‌باشد و رادیکال اعداد نامنفی آن به عنوان عضوهای مجموعه A قرار می‌گیرند. بنابراین مجموعه A شامل اعداد حقیقی از ۰ تا $\sqrt{10}$ می‌شود که در بین آنها چهار عضو صحیح ۳ و ۲ و ۱ وجود دارد.

گزینه ۴۶

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$B = \{ab \mid \{a, b\} \subseteq A, a \neq b\}$$

$$= \{1 \times 3, 1 \times 5, 1 \times 7, 1 \times 9, 3 \times 5, 3 \times 7, 3 \times 9, 5 \times 7, 5 \times 9, 7 \times 9\}$$

بنابراین $n(B) = 10$ است.

گزینه ۴۷

برای اینکه $-23 \in A$ باشد یعنی $2x + 1 = -23$ می‌توان $x = -12$ و $n = 1$ را در نظر گرفت. پس مجموعه A به صورت $A = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ خواهد بود. با توجه به $\{a, b\} \subseteq A$ نتیجه می‌گیریم که هر دو عدد به صورت $2x + 1$ خواهند بود مثلاً $a = 2k + 1$ و $b = 2l + 1$ پس داریم:

$$a + b = 2k + 1 + 2l + 1 = 2(k + l) + 2$$

یعنی $a + b$ برابر عددی صحیح است که از مضرب ۲، دو واحد بیشتر باشد در مجموعه (A) عدد ۱۳۹۵ به صورت مضرب ۲ و عدد ۱۴۲۸ و ۲۰۱۷ از مضرب ۳، یک واحد بیشتر هستند. اما در مجموعه (B) همه اعداد از مضرب ۳، دو واحد بیشتر هستند:

$$1358 = 3 \times 452 + 2, 1388 = 3 \times 462 + 2, 1324 = 3 \times 444 + 2$$

گزینه ۴۸

$$\{x \mid x \in \mathbb{N}, \frac{16}{x} \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 4, 8, 16\} \Rightarrow n = 5$$

زیر مجموعه‌های ۲ عضوی یا ۳ عضوی مجموعه داده شده، طولانی‌ترین یاد زنجیر خواهد بود.

$$n(n-1) = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

گزینه ۴۹

$$A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots\} = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{189}{x} \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 7, 9, 21, 27, 63, 189\}$$

$$C = \{2k - 7 \mid k \in \mathbb{N}, 10 \leq k \leq 90\}$$

$$= \{2(10) - 7, 2(11) - 7, \dots, 2(90) - 7\} = \{13, 15, 17, \dots, 173\}$$

با توجه به نمایش‌های بالا، هر سه مجموعه شرط‌های اول و دوم را دارند اما شرط سوم فقط در مجموعه‌های A و C برقرار است.

می‌دانیم هر دو عدد متوالی دارای ب.م.م یک هستند پس مربع‌های آنها نیز دارای ب.م.م یک خواهند بود (مجموعه A شرط سوم را دارد و جذاب است) همچنین می‌دانیم هر دو عدد متوالی فرد دارای ب.م.م یک هستند (مجموعه C نیز جذاب خواهد بود) اما در مجموعه B مثلاً $2(9, 21) = 2$ است.

گزینه ۴۹

مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان نمایش می‌دهیم.

سپس اشتراک دو مجموعه را می‌نویسیم:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, B = \{1, 2, 7, 14\} \Rightarrow A \cap B = \{1, 2\}$$

گزینه ۴۹

$$\{a, \emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{a, a\}\} = \{a, \emptyset, \{\emptyset\}, \{a\}, \{a, a\}\}$$

پس اجتماع دو مجموعه دارای ۳ عضو می‌باشد، در نتیجه تعداد زیرمجموعه‌های آن 2^3 یعنی ۸ زیرمجموعه است.

گزینه ۴۹

عضوهای مجموعه B، اعدادی طبیعی هستند که از مضرب‌های ۳، یک واحد بیشتر می‌باشند، بنابراین:

$$B = \{3(1) + 1, 3(2) + 1, 3(3) + 1, \dots\} = \{4, 7, 10, \dots\}$$

$$\{0, 1, 2, 3, \dots, 20\} \cap \{4, 7, 10, \dots\} = \{4, 7, 10, \dots, 19\}$$

$$n(A \cap B) = \frac{20 - 4}{3} + 1 = 9$$

گزینه ۴۹

۳ و ۵ عضوهای مشترک دو مجموعه A و B هستند، بنابراین:

$$A \cap B = \{3, 5\}$$

گزینه ۴۹

با توجه به مجموعه‌های $A = \{4, 5, a\}$ و $B = \{1, b, 5, 7\}$ داریم:

$$A \cup B = \{4, 5, a, 1, b, 5, 7\} = \{4, 5, 1, 7, a, b\}$$

از طرفی دیگر در صورت مسئله بیان شده که $A \cup B = \{5, 7, 1, 2, 6, c\}$ بنابراین:

$$\{4, 5, 1, 7, a, b\} = \{5, 7, 1, 2, 6, c\}$$

$$\Rightarrow c = 4, a + b = 2 + 6 = 8 \Rightarrow a + b + c = 8 + 4 = 12$$